# FOREWORD

Convinced of the educational and national value of the use of Indian Languages in Indian Universities, the Academic Council of Nagpur University, on 12th September, 1946, resolved that Hindi and Marathi shall be the media of instruction in the University: for the Intermediate courses in Arts and Science from the academic year 1949-50 and for the courses for the B. A. and B. Sc., from the academic year 1951-52. And from the same dates English shall cease to be the medium of instruction in the University.

While co-operating whole-heartedly in the prolonged All-India deliberations for the long-range planning for introduction of Indian languages as media of instruction, Nagpur University has—except as regards postponement of the scheme in respect of the science courses for one year—stuck to its schedule, endeavouring, with all its limitations, to surmount the imme-

diate practical difficulties in carrying through a linguistic transition of this magnitude

2 These difficulties are, in the main, the three T's of Terms, Text books and Teachers

Thanks to the timely initiative and generous support of its Government, it was possible for the State of Madhya Pradesh to obtain the services of Dr Raghu Vira of the International Academy of Indian Culture of Lahore and to entrust him with the formidable but foundational task of coining and adapting the technical terms of science for the needs of the new linguistic media Dr Raghu Vira, who had already devoted a considerable part of his life to a scientific approach to the problem of technical terms has proceeded to his task on the basic principle of *allied words for allied ideas*, derived from the Sanskrit roots He has reduced the problem of coining terms almost to an art, an art as fine as it is useful

3 These terms have been coined and adapted in close collaboration with a band of experienced and enthusiastic teachers of science deputed by the State Government at the same time to prepare suitable text books of science

under the general direction and guidance of Dr. Raghu Vira.

They have so far prepard fourteen text-books each with a Hindi and a Marathi version dealing with the Intermediate Science courses in Algebra, Trigonometry, Solid Geometry, Co-ordinate Geometry, Statics, Dynamics, Physics (Theory), Practical Physics, General and Inorganic Chemistry, Organic Chemistry, Practical Chemistry, Zoology, Botany (Theory) and Botany (Practical).

The manuscripts of these text-books, when received from the Government, were referred by the University to its Boards of Studies in the various subjects and, on receipt of their reports, the Academic Council decided, on 8th December, 1949, that, subject to certain specified changes, they be recommended as suitable for the Intermediate Science courses of the University.

4. Finally, in accordance with a suggestion of the State Government and with the help of an appropriate Government grant, the University decided in April, 1950, to undertake the publication of these first text-books prepared for its courses in science. Their printing is now

in progress and seven of these—both Hindi and Marathi versions—which are required for use in the first year of the Intermediate courses are being published today

5 In the special position occupied by the the Universities of the Madhya Pradesh, it has been necessary to publish these books both in Hindi and Marathi This has added to the labour and the cost involved At the same time it has given us a unique advantage we have here an opportunity of piloting an educational experiment in a regional language and at the same time in the language of the Union The inter action of the two parallel series of lectures and text books in the same University—and in many cases, in the same college—will, I am confident, prove valuable for the emergence of both Hindi and Marathi as more perfect media of higher education than they can claim to be at present

6 As regards the change of medium for the Intermediate Arts courses, this has already been brought into force from the academic year 1949-50 The proposal for preparation and publication of text books specially designed for

the needs of the University is still under the consideration of the authorities. It was, however, thought desirable not to postpone the operation of the scheme in respect of the Arts courses as (i) the number of technical terms required for Arts is much smaller, as compared with those required for Science; and (ii) a certain number of text-books of the Intermediate Arts standard are already available, both for Hindi and Marathi. For certain subjects, glossaries of technical terms which will serve the preliminary needs of the teachers and the students have also been prepared by the University Boards of Studies. It is further hoped that it would soon be possible to adopt a scheme for preparation of text-books for Arts subjects also.

7. At the transitional stage, the problem of teachers adequately qualified to give instruction through the Indian languages presents another hurdle. For reasons, both historical and geographical, the colleges of Madhya Pradesh have been fortunate in having on their staff teachers who, between themselves, can claim almost all the principal spoken languages of India as their mother-tongues. At the present stage,

however, this creates an immediate difficulty in re organizing the teaching arrangements on the new basis The University is, however, confident that, where necessary, the teachers will avail themselves of the existing opportunities of acquiring a fairly good knowledge of the language of the Union or a language of their region and that the teachers and the management will, between themselves, so arrange the teaching programmes of colleges that the transition to the new media is made both smooth and effective

No formal test for imparting instruction through the new media has accordingly been prescribed by the University

8 The final shape of the cultural media of the new India will, after all, be moulded by that intellectual commerce between the teacher and the taught which we call University education The scheme of Nagpur University leaves the choice as between the Sanskritic technical terms and their equivalents to the teachers and the students themselves The text books being published under the scheme give the new Sanskritic technical terms as well as their English equi-

valents and both teachers and students are, at the present stage, permitted to use either of them according to their convenience and requirements. Adoption of this course cuts across the prevailing controversy with regard to the structure of technical terms and, at the same time, gives the newly-coined terms an opportunity to be judged on their own merits along with their English competitors in the academic field.

9. Progress in education requires both individual experiments and general planning, local initiative as well as central direction. It would hardly be proper to be dogmatic about their order of priority and, in the case of a great linguistic transition at the University stage, the problem requires to be attacked on all fronts. The Conference of Education Ministers and Vice-Chancellors of India convened by the Ministry of Education in New Delhi in January, 1948, had recommended five years as the time-limit within which Indian Universities should make the requisite preparations for commencing their instruction through the Indian languages. The Indian Universities Commission has, however, wisely left the determination of the duration

of the preparatory period to the interplay of the various educational and social factors that operate in Universities Adoption of such a course would leave each University freedom to regulate the pace of its linguistic progress according to its own needs, resources and limitations

10 Change in the medium of instruction at different dates in different Universities no doubt gives rise to fresh problems Each of these has, however, to be tackled by an intelligent and sympathetic administrative approach One of these difficulties evidently relates to the migration of students from one University to another —a process which, I hope will in the national interests, receive every encouragement in the future The difficulty in this respect, however, would not seem to be so formidable as it might appear at first sight, if we remember that (i) English text-books in each subject will be recommended along with the Hindi and Marathi text books for use of students, (ii) students and teachers will, for the present, be familiar both with the Hindi or Marathi terms and with their English equivalents, and (iii) English will continue to be a compulsory subject both for

the Intermediate and for the first degree courses in Arts and Science.

The same considerations would seem to apply to the apparent difficulties in respect of All-India Competitive Examinations. With the goodwill and determination shown by the builders of the new constitution of India, there is good reason for hoping that English may soon cease to be the sole medium for the All-India Competitive Examinations. The institution of the language of the Union as the medium of instruction and examination in the Indian Universities should itself accelerate the pace of progress towards this transition.

11. I venture to hope that this series of books will prove useful not only for the State of Madhya Pradesh, but also for other States in their efforts to adopt a regional language or the language of the Indian Union as the media of instruction at the University level. The present effort is necessarily imperfect. We can write good books in Hindi and Marathi only if we can do original thinking in Hindi and Marathi, as we do in English today. Yet we can hope to do our thinking in Indian languages only when we have

some written material to stimulate and sustain our thinking in these languages. It is a vicious circle that has to be broken and the present series of books is an organised attempt to break it. Deeper thought, practical experience, national planning and local variations will, I have no doubt, change the shape of much of what is written in these text-books. If, however, they serve even as a raw material on which these forces can play to mould them according to our varying requirements, the labour of those who have worked during the last four years for making this new academic venture a success will have been amply rewarded.

The J. N. Tata University
Convocation Hall, Nagpur.
15th August 1950.

*K. L. Dubey*
Vice-Chancellor,
Nagpur University.

# INTRODUCTION*

"It is India that gave the ingenious method of expressing all numbers by means of ten symbols, each symbol receiving a value of position, as well as an absolute value a profound and important idea which appears so simple to us now that we ignore its true merit but its very simplicity, the great ease which it has lent to all computations, puts our arithmetic in the first rank of useful inventions

'Even though there has been a slow growth of ideas in the history of human civilization the history of reckoning presents a peculiar picture of desolate stagnation When viewed in this light the achievement of the unknown Hindu, who sometime in the first centuries of our era discovered the principle of position, assumes the proportion of a world event

'The invention of sūnya or zero liberated the human intellect from the prison bars of the Greek counting frame Once there was a sign for the empty column,

* In writing the Introduction in English I have followed the wishes of Lt Col Shri K L Dubey, the Vice Chancellor of the Nagpur University It is hereby intended to introduce the book to such teachers as know neither Hindi nor Marathi.

'carrying over' on slate, paper or other material for writing was just as easy as carrying over on the abacus.

"Āryabhata about A D. 470 discusses the rules of arithmetic, uses the law of signs of Diophantus, gives a table of sines in intervals of $3\frac{3}{4}$, and evaluates $\pi$ as 3 1416 **In short, Hindu mathematics starts where Alexandrian mathematics left off.** Just a little later, in the sixth century, comes Brahmagupta, who follows the same themes as Āryabhata calculation, series, equations These early Hindu mathematicians had already stated* the laws of 'ciphers' or śūnya, on which all our arithmetic depends, namely,

$$a \times 0 = 0$$
$$a + 0 = a$$
$$a - 0 = a$$

"Equipped with their simple and eloquent number symbols the Hindus broke away completely from the metaphorical way of dealing with fractions They wrote fractions as we write them and as they had an arithmetic which lent itself to rapid calculation without mechanical aids, they experimented with them as with whole numbers. Thus Mahavira (A D. 850) gave our rule for dividing one fraction by another in the same words which a school teacher might use today 'make the denominator the numerator and then multiply

"All the algorithms for fractions now used were invented by the Hindus.

* To this is to be added

$$\frac{a}{0} = \infty$$

**"Is it not equally strange that algebra that corner stone of modern mathematics also originated in India and about the same time that positional numeration did ?**

"The advance from 'rhetorical' discussion of rules for solving problems to symbolism of the modern sort was wellnigh impossible for the Greeks, who had already exhausted the letters of the alphabet for proper numbers Although the Hindu numerals removed this obstacle to progress, there was at first no social machinery to impose the universal use of devices for representing operators. The only operative symbol which was transmitted to us by the Arabs from Hindu sources is the square root sign ( $\surd$ )."

*Prof. Lancelot Hogben*

*　　　*　　　*

उत्पादकं यत्प्रवदन्ति बुद्धेरधिष्ठितं सत्पुरुषेण सांख्याः ।
व्यक्तस्य कृत्स्नस्य तदेकबीजमव्यक्तमीशं गणितं च वन्दे ॥

(Bhāskarācharya, 12th century A D)

Algebra is बीज, बीजक्रिया or बीजगणित, the science of analysis, the operation or computation with 'seeds'. It was also known as कुट्टक गणित or simply कुट्टक (which dealt particularly with indeterminate equations of the first degree) Another name was अव्यक्त गणित 'calculations with unknowns' as against व्यक्त गणित 'calculation with knowns' used for arithmetic and geometry.

According to our ancients, the values of symbols in arithmetic are व्यक्त that is definitely determinate while in algebra they are अव्यक्त that is indefinite. Bhaskaracharya clearly said that the science of अव्यक्त गणित is the source of the science of calculation with knowns.

Ancient Hindu algebra comprised the laws of signs, the arithmetic of zero and infinity, operations with unknowns, surds *indeterminate equations of the first degree* and the square nature or the so called Pellian equation. To these may be added concurrence and dissimilar operations.

*Algebra began early in India during the Vedic age.* The geometrical method of the transformation of a square into a rectangle having a given side is equivalent to the solution of a linear equation in one unknown—

$$ax = c^2$$

Vedic fire altars were constructed in *different* geometrical designs *one of them was the syena chiti (in the form of a falcon).* Its body consisted of four squares, each of its wings a rectangle, and so on. This fire altar was enlarged in two ways —firstly, so that all the constituents were affected in the same proportion, secondly so that the breadth of a portion of the wings was left unaffected. If $x$ be the unit for enlargement in the first case we shall have to solve the quadratic equation

$$2x \times 2x + 2\left\{x\left(x + \frac{x}{5}\right)\right\} + x\left(x + \frac{x}{10}\right) = 7\frac{1}{2} + m,$$

where $m$ denotes the increment of the fire-altar in size

Therefore $\quad x^2 = 1 + \frac{2m}{15}$

In particular, when $m = 94$, we shall have

$$x^2 = 13\frac{8}{15} = 14 \text{ (approximately)},$$

which occurs in the Śatapatha Brāhmana.

In the second case of enlargement the equation for $x$ will be

$$2x \times 2x + 2\left\{ x\left(x+\frac{1}{5}\right) \right\} + x\left(x+\frac{1}{10}\right) = 7\frac{1}{2} + m,$$

$$\text{or } 7x^2 + \frac{1}{2}x = 7\frac{1}{3} + m,$$

which is a complete quadratic equation.

The problem of altar construction gave rise also to certain indeterminate equations of the second degree, such as,

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = z^2$$

$$(2) \qquad x^2 + a^2 = z^2;$$

and simultaneous indeterminate equations of the type

$$ax + by + cz + dw = p,$$

$$x + y + z + w = q.$$

SYMBOLS OF OPERATION—The first syllable of a word, placed before or after the quantity, served the purpose of the symbol. For addition one of the Sanskrit words is युत. It is abbreviated to यु. Similarly the ancient Brāhmī क, which is a cross, stands as the symbol of subtraction,

being the abbreviation of क्षय गु abbreviated from गुणन or गुणित stands for multiplication and भा from भाग or भाजित for division. Often these symbols are not used. Juxtaposition serves the purpose. The use of these symbols is best illustrated by the Bakhshali manuscript Bakhshali is a village in the Peshawar district. The manuscript lay between stones It was discovered by a farmer who was digging in the mounds in 1881 This is the oldest mathematical manuscript yet discovered It is written in ancient Sarada script of Kashmir on birch bark Its age has been variously estimated some placing it in the second century (in the days of Kanishka), others as late as the twelfth century A D

| ० ५ गु<br>१ १ | means | $\frac{x}{1}+\frac{5}{1}$ |
|---|---|---|
| ११ ५<br>गु<br>१ १ | means | $\frac{11}{1}+\frac{5}{1}$ |

*(folio 59 recto)*

| ३ ३ ३ ३ ३ ३ ३ १० गु |
| १ १ १ १ १ १ १ १ |

means $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 10$

*(folio 47 recto)*

० | १ ३ | ३ ५ | ३ ७ | ४ ९ ||
१ | १ २ | १ २ + | १ गु २ + | १ गु २ + ||

means

$$x\left(1+\frac{3}{2}\right)+\left\{2x\left(1+\frac{3}{2}\right)-\frac{5x}{2}\right\}$$

$$+\left\{3x\left(1+\frac{3}{2}\right)-\frac{7x}{2}\right\}+\left\{4x\left(1+\frac{3}{2}\right)-\frac{9x}{2}\right\}$$

*(folio 25 verso, mutilated)*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| १ | १ | १ | १ | भा | ३६ |
| १+१ | | १ | १ | | |
| २ | ३ | ४+५ | | | १ |

means $\dfrac{36}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)}$

*(folio 13 verso)*

| | | |
|---|---|---|
| ४० भा | १६० | १३ |
| १ | १ | १ |
| | | २ |

means $\frac{160}{40}\times 13\frac{1}{2}$

*(folio 42 recto)*

| | |
|---|---|
| ० ५ यु मू ० | स ० ७ + मू ० |
| १ १    १ | १ १    १ |

means $\sqrt{x+5}=s,\ \sqrt{x-7}=t$

*(folio 59 recto)*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ० | ५ १ | ३ ३ | १२ ४ | दृश्य ३०० |
| १ | १ १ | १ १ | १ १ | १ |

means $x+2x+3\times3x+12\times4x=300$

*(folio 23 verso)*

In later times there was a change of plan in the writing of equations. Here are two illustrations, one from Pṛithūdakasvāmī (860 A. D) and the other from Bhāskarāchārya (1150 A. D.)—

| | | | |
|---|---|---|---|
| (१) | या व ० | या १० | रू ८ |
| | या व १ | या ० | रू ? |

writing $x$ for या

$x^2\, 0 + x \cdot 10 - 8$

$x^2 \quad + x\, 0 + 1$

or $\quad ox^2 + 10x - 8 = x^2 + 0\, x + 1$

which means $10x - 8 = x^2 + 1$

(२) या ५ का ८ नी ७ रू ९०

या ७ का ९ नी ६ रू ६२

writing $x$ for या, $y$ for का and $z$ for नी

$5x + 8y + 7z + 90 = 7x + 9y + 6z + 62$

Equations were classified as यावत् तावत् (simple), वर्ग (quadratic), घन (cubic) and वर्गवर्ग (bi quadratic) The स्थानांगसूत्र *of Jainas* (सूत्र ७४७) *is sometimes interpreted to* refer to these equations Another classification of equations is according to Brahmagupta of 628 A D एकवर्ण समीकरण, अनेकवर्ण-समीकरण and भावित i e equations *in one unknown*, in several unknowns and such as involved products of unknowns एकवर्ण समीकरण is further sub divided into linear equations and quadratic equations अव्यक्तवर्ग समीकरण

It would be interesting to follow the ancient algebraists of *India one by one and century to century* But it would be outside the scope of this small introduction Here I shall mention in passing a point or two which are of particular *interest for the history of* mathematics In 850 A D Mahavira a Jain author, wrote an epoch making work गणित सारसंग्रह He knew that the quadratic has two roots, and he employed the modern rule for finding the root of a quadratic

$$x=\left\{\frac{c/2}{1-a/b}+\sqrt{\left(\frac{c/2}{1-a/b}\right)^2+\frac{d}{1-a/b}}\right\}^2$$

Algebra is a generalization of arithmetic, for example, the arithmetical facts that $2+2+2=3\times2$, $4+4+4=3\times4$, etc, are all special cases of the algebraic statement that $x+x+x=3x$, where $x$ is any number.

Algebra makes use of numbers, letters of the Roman and Greek alphabets and symbols of operation. As compared to biological sciences, the number of technical terms is insignificant

We are fortunate in possessing a basic terminology for algebra from ancient times As is clear from a quotation given above, algebra originated in India. As far as the use of the operational symbols, like those for plus, minus, greater than, smaller than, therefore, is concerned the Western symbols have been retained in their entirety. As regards the use of the numerals and letters of the alphabet, we have been able to use our own. It was not possible to use the European numbers and letters in a Hindi or Marathi text book

Following the general plan, we have derived our specific algebraic terms from Sanskrit. These terms would be found to be in consonance with the rest of our language Introducing English terms would have been as awkward as unintelligible. A detailed discussion of the matter will be found in our forthcoming work "The Problems of Indian Scientific Terminology".

The algebraic terminology was worked out in collaboration with Dr Braj Mohan, M A, Ph D of the Banaras Hindu University Shri N A Shastri, M Sc, (Lond), Asst Prof of Mathematics Mahakoshal Mahavidyalaya, Jubbulpore and Shri V M Dabadghao, M.Sc, Asstt Professor of Physics, Vidarbha Mahavidyalaya, Amraoti Shri Dabadghao is a physicist and his collaboration was of special value in exploring the use of symbols in physics and mathematics before finally deciding upon *the Devanagari letters* Shri V M Dabadghao, Shri N A Shastri and a number of their collaborators worked on the symbols for month on end A complete list of mathematical symbols in Devanagari has been printed and is available separately English abbreviations have their counterparts in Hindi and Marathi, e g, log (logarithm) — छ (छेश)

Our rock bottom is formed by ancient words— अंश, numerator, degree, अंक digit, अन्तर distance, अपेक्षित required, आदेश substitute, आरोही ascending उपपत्ति proof, करणी surd, क्षितिज horizon श्रेढी series, तिर्यग्गुणन cross multiplication समीकरण equate निर्वचन interpretation निदर्शन illustration, बीजगणित algebra, मूल root, radical (the European words are translations from Sanskrit) योग sum, राशि quantity लब्धि quotient, अपवर्त्य multiple, हर denominator सारणी *table, etc, etc*

Then there are words of common usage—अग्र leading, अचल constant अनियत indefinite, अनुसंधान investigation, आधार base, आवर्ती recurring, उच्चतम highest उन्नयन raising, ऐकात्म्य identity, चल variable, निश्चायक determinant, नियम

law, पंक्ति row, प्राकृतिक natural, महत्तम greatest, रेखा line, रैखिक linear लक्षण characteristic, वास्तविक real, विवेचक discriminant, विस्तार expansion, साधारण common, सामान्य general, सीमा limit, etc, etc.

Our ancients used a variety of terms to denote the same idea or the same term to denote various ideas For us it was neither desirable nor possible to use one word for more than one idea or more than one word for the same idea We had to use definite terms so that there be no confusion as to what is meant Thus कर्ण is used for the hypotenuse as well as the diagonal रूप means form, arithmetical unit, integral numbers, known or absolute number, and a known quantity as having specific form Similarly वर्ण appears for the letters of the alphabet for an unknown magnitude or quantity in algebra, for the figure 1 in arithmetic and according to some for a coefficient

For quotient we have भाग, लब्धि, आप्त, आप्ति, अवाप्त अवाप्ति, फल, लब्ध For coefficient we have गुण, अंक प्रकृति वर्ण and यावत् तावत् The coefficient of a root in algebra is मूलगुण Here गुण is an agent noun, meaning a multiplier, equivalent to गुणक For multiplication itself, Sanskrit mathematical literature shows a variety which is unsurpassed—गुणन, गुणता, हनन, हति, हत, अभिहति, वध, वर्गणा, पूरण, अभ्यास, क्षोद, प्रत्युत्पन्न. अनुपात stands for proportion, arithmetical progression and rule of three

Our mathematical terminology is not an isolated

list. It is in consonance with the rest of our scientific terminology, in particular with physics.

The specific terms used in algebra are not very many. They are few and simple. Those requiring a word of explanation are listed below.

अनावर्ती 'nonrecurring' is from आवर्ती 'recurring' आवर्तन is 'recurrence'.

अनुपाती 'proportional'. अनुपात 'proportion' is well-known.

अन्यथा 'aliter' Aliter is a Latin word meaning otherwise. For the Indian student अन्यथा has its parallel formations in यथा, तथा, etc

अपवर्त्य 'multiple' from अपवर्त 'the divisor', अपवर्तक 'the common measure', अपवर्तन 'reduction of a fraction to its lowest term, division without remainder, divisor.' अपवर्त्य is widely used

असमेय is a faithful translation of incommensurable, element by element, *in-* अ- + *-com* -स- + *mensurare* √मा + *-able* यः.

आदेश 'substitute' is well known to students of Sanskrit, e g Panini स्थानिवदादेशोऽनल्विधौ.

क्रमचय and संचय for 'permutation' and 'combination' respectively are self explanatory terms and have been used as being clearer and more definite than भावना for combination and व्यभिचार for permutation.

छेदा 'logarithm'. According to नेमिचन्द्र the Jain author of त्रिलोकसार if $x=2^n$ then $n$ is called the अर्धच्छेद of $x$. छेद is the number of times a particular number can be divided by a base. If $64=4^3$, then 3 represents the number of times that 64 can be divided by 4. Literally छेद is 'cutting' and *the number of times that the* division can take place is छेदसंख्या or simply छेदा. In $64=4^3$, 3 is the log of 64 to the base 4.

दशमिकांश 'mantissa'. The Indian word is crystal clear while the English word is perfectly opaque. In Latin it meant an addition, make weight. The word is believed to be of Etruscan origin. This word has gone out of use in general English, where it meant an addition of little value. In mathematics it denotes the decimal part of a common logarithm.

निष्पत्ति for 'ratio' is used not only in Hindi but also in Bengali and elsewhere, e.g., in the Modern Anglo Bengali Dictionary by Charu Chandra Guha.

प्रति छेदा 'anti logarithm' *from* छेदा '*logarithm*'.

प्रतिनिधान 'to represent'. प्रतिनिधि for representative is well known.

फलन 'function' (for explanation see the Glossary)

मापांक is clearer than English 'modulus' which literally means 'a small measure'.

मूलक्रिया 'extraction of roots'. It is an ancient word. Latin 'evolution' means simply 'unfolding'.

विवेचक 'discriminant' विवेक 'discrimination' is well known. विवेचन is the verbal noun from the same root.

व्युत्क्रम 'reciprocal'. व्युत्क्रम is literally inverted order, so is the reciprocal of a fraction In Latin 'reciprocal' is turning backward and forward

व्यतिहरण is an ancient word meaning interchange.

शुद्ध 'correct' Cf. परिशुद्ध 'accurate'

सत्यापन 'verification' is an ancient word The verbal form is सत्यापयति 'verifies'

समापवर्तक 'common factor is of wide usage

समार्ह 'equivalent' अर्हा is an ancient word अर्हा 'value' is derived from the root अर्ह् 'to be worthy of

साध्य '*that which is to be found out by calculation, to* be proved or established ' Similarly प्रमेय 'that which is to be established by प्रमाण or proof '

सारणी for 'table' is of common use among the astronomers of India

सम्मितीय 'symmetrical' is from सम्मिति 'symmetry' (सम् *sym-* + मिति- *metry*)

It was in the middle of the year 1946 that I was invited by Shri W. R Puranik, the then Vice Chancellor of the Nagpur University to deliver a course of 17 lectures

on Indian scientific terminology for physical sciences A few months later I was invited by the Provincial Government to come down to Nagpur in order to plan and prepare the series of scientific text books for the Nagpur University with the cooperation of University teachers After three years of continuous work we are now glad to be able to bring out our first book of Intermediate Algebra in Hindi and Marathi

The beginning of the Intermediate Algebra was made in February 1947 by Shri A P Shrivastava who was deputed to work with me by the Government of Madhya Pradesh Shri Shrivastava planned and collected his material from authoritative works and from text books which are used at Indian Universities Shri N A Shastri joined us in April 1947 He went over the material collected and helped the author with his suggestions and improvements Questions set at Indian University examinations were added on with the help of Shri B K Paradkar Every problem was solved by the author and answers were appended to the book

The collection of the material its sifting and revision had been conducted in English The next step was the preparation of a complete list of algebraic terms phrases and symbols for which Hindi equivalents were needed These were made available to the author by me Shri N A Shastri and Shri V M Dabadghao working in collaboration Shri Shrivastava then took to the evolving of an algebraic style in Hindi It was a fascinating venture The entire book was recast a second and a third

time, until it was approved by all of us concerned. The Hindi version was next rendered into Marathi by Kumari A. Date. The two versions were carefully compared by Shri Shastri, Shri Shrivastava and Kumari Date. Finally the book was submitted to the Board of Studies in Mathematics of the University of Nagpur, which while proposing that the book be recommended in the Intermediate Examination in Science of the University made a number of suggestions for improvement, which have been duly incorporated.

* * *

During the course of last three years, I have had the privilege of enjoying the kind sympathy of the Hon'ble Pt. Ravi Shankar Shukla, the Chief Minister of Madhya Pradesh. To the Hon'ble Shri D. K. Mehta, my debt of gratitude is immense. It is he who, as the Finance Minister of the State, set the ball rolling. The Hon'ble Pandit Dwarka Prasad Mishra with his unbounded love for Hindi, has been taking personal interest and has gone so far as to establish a special department for the purpose of establishing Hindi and Marathi as the languages of this State. To Lt. Col. N. Ganguli the Education Secretary in 1947 48 and his successor Dr. V. S. Jha, I am indebted, for giving top priority to my requirements. Since the establishment of the Languages Department in January 1950, Shri A R. Deshpande, the Under-secretary, has been extending to me his wholehearted cooperation.

My very special thanks are due to Lt. Col. Kunji

Lal Dubey, the Vice Chancellor of the Nagpur University. It is due to his love for Hindi and Marathi that the Nagpur University is leading India in the matter of introducing Hindi and Marathi as the media of instruction It was again due to him that the Nagpur University has taken the heavy responsibility upon itself of publishing the text books that were prepared under the orders of the Government of Madhya Pradesh.

Lastly my thanks are due to my colleagues, the authors of the text-books, who have been with me for the last three years. They have worked devotedly, fully convinced of the service that they are rendering to the nation They have considered their work to be their reward.

Raghu Vira

---

*Hereafter follow three facsimile pages of the Bakhshali manuscript Their contents are transliterated into Devanagari, followed by the same rearranged so as to be better understood, and finally an English translation —Raghu Vira

. Bakhshali Manuscript

## Folio 13 verso

(*a*) Transliterated from ancient Śāradā into Devanagari

. . . . . . . . . . . . . . . . ० | फल्द्रो १९
१
१
. . . . . ४ | १० | ४ | ॥उदा॥ करस्य
१ | आ २ | १ | १
. . . ज्जकस्य ४ | ४ श्रो | पष्ठिस्तद्दले | ४ | नक्षयंगत
१ | प्र ० | १
.उ. वृद्धय.वृभा ४ | गेन | ४ आ प्र | स्त्रपादेन | ४ | त्तनोद्धित । .
कु २
द्धन.तुपचमागेनस्तथा | कु ४ प्ररिय | वृद्धिद्वयोगतं । कावृद्धि .

. . . . . स्त्रा.कैंवायेस्तदुच्यता | ६० | १ १ २ १ | त्तास्त्र
| १ | १ १ २ १ |
. . . . . . ता ३६॥ प्रलयपु | | २+ ३ ४+ ५ | नारनेत्र

१ १ १ १ भा ३६ | फल ६०॥ पुनान्यंप्ररत्ये | ६० | फल
१+ १ १ १ | १
२ ३ ४+ ५ | १ | १+
. . रयेत्रमूलनष्टायते॥ | फ. | २ | त्र
+ +
० ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~

पुनान्य प्रत्यय

| ६०
| १
| १
| +
| २
. १ .
. ३ .
. १ .
. + .
. ४ .
. १ .
. ५ .

फल ३६ ॥ . . . . मूलं न ज्ञायते

० १ १ + २ १ ३ १ + ४ १ ५ | फल

(c) Interpreted

(i) Continued from the obverse.

(a) $x^1 = \dfrac{19\,\text{dro}^\circ + 2\text{a}^\circ + 0\,\text{pra}^\circ + 2\,\text{ku}^\circ}{(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{3})} = 10$

(b) $x^1 (1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{2}) = 19\,\text{dro}^\circ + 2\,\bar{\text{a}}^\circ + 0\,\text{pra}^\circ + 2\,\text{ku}^\circ$ < whence $x^1 = 10$ >.

(ii) *Example*: The capital of a certain banker is sixty. One half of it goes in loss and then he gains by one-third, next he lo es one fourth of it and finally gains one-fifth, so that he has two gains. What is his gain and what is his loss and what the remainder and let that bo stated.

Solution: $60(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1+\frac{1}{5}) = 36.$

Proofs (a) $x^1 = \dfrac{36}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1+\frac{1}{5})}$, whence $x^1 = 60$.

(b) $60\,(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1+\frac{1}{5})=36.$

(c) $x^1\,(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1+\frac{1}{5})$

$=36$ <whence $x^1=60$>

## Folio 42 recto

(a) Transliterated from ancient Śāradā into Devanagari

| | | |
|---|---|---|
| १ | | १ |
| ३ | | १ |
| | | २ |
| | | १ |
| | | २ |

फ ५४ . . . भिद्यते ।

| | |
|---|---|
| २ | १ |

........

संरवासार्धं उक्तिमत्रयोदशसार्धंभवति

| | | |
|---|---|---|
| ४० भा | १६० | १३ |
| १ | १ | १ |
| | | २ |

. . .

. . वि एषांच्छेदांकृताजाता एकेन . . .

. रि सार्धत्रयोदशभिकिमिति

| | | |
|---|---|---|
| १ | ४ | २७ |
| १ | १ | २ |

फ ५४ एषांभव.

. . एकेनलब्ध चत्वारिंशइभि संपद्यैकथं १

. . ॥ ५६ . . एकोऽमति चत्वारिंशसर्धेरपनुक्तिंमनेत् १

. . . . . . . . . . . . . . गि. म्. .

(b) Rearranged

आर्धं युक्तं त्रयोदश सार्धं भवति

| | | |
|---|---|---|
| ४० भा° | १६० | १३ |
| १ | १ | १ |
| | | २ |

. . . . एषां च्छेदां कृता जाता एकेन.

. . . सार्धं त्रयोदशभि किमिति | १ १ | ४ १ | २७ २ | फ॰ ५४ एषां .

. एकेन लब्ध चत्वारिण् षड्भि सप्तने कथ | १ १ . . . . ४ |

. . एको लभति चत्वारि गसर्धस्य तु किं भवेत् . . . . . . .

(c) Interpreted.

This contains portions of a solution that is not at present, fully understood. The preliminary work is missing and then comes the following proportion $40 \quad 160 : 13\frac{1}{2} \quad \dot{5}4$, or cancelling by 40 we get $1 \quad 4 \cdot \frac{27}{2} \quad 54$ The next part is missing but apparently was—

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 24$$
$$1 \quad 4 \quad 3 \quad 12$$
$$1 \quad 4 \quad \frac{9}{2} \quad 18$$

## Folio 47 recto

(*a*) Transliterated from ancient Śāradā into Devanagari

. . . . . . . . . . . . . ऋ . . . . . . र . . .
विचक्षण: चमूस्तुपृतनास्तिस्रस्तिस्रश्चमू . . . . . . . . . .
नीकीनिदशगुणामाहुरक्षोहनीबुध: ॥ अक्षोहि . . . . . . . .

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| र १ | प | २ | २ | २ | २ | २ | २ | २ | | १० गु | गुणितजा |
| ग १ | प | १ | १ | १ | १ | १ | १ | १ | | १ | |
| न ५ | प | | | | | | | | | | |
| तु २ | ति | णी | रथ | | | २१८७० | | | | | एष अक्षोहि |
| | | | गज | | | २१८७० | | | | | प्रमाणं ॥ ॥ |
| दा ॥ कश्चिद्राज | | | नर | | | १०९३५० | | | | | कुमारशत्रुदम । |
| | | | हय | | | ६५६१० | | | | | . . . ि . . ो . . |

(*b*) Rearranged

(१)

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . विचक्षण:
चमूस्तु पृतनास्तिस्रस्तिस्रश्च . . . . . . . . . . . .
अनीकीनि दशगुणां आहुरक्षोहनीबुध . ॥
अक्षोहि . . .

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| र° १ | एष | २ | २ | २ | २ | २ | २ | २ | | १० गु° |
| | पति | १ | १ | १ | १ | १ | १ | १ | | १ |
| ग° १ | गुणिता जाता | रथ | | | | २१८७० | | | | |
| न° ५ | | गज | | | | २१८७० | | | | |
| | | नर | | | | १०९३५० | | | | |
| तु° २ | | हय | | | | ६५६१० | | | | |
| | | | | | | (२१८७००) | | | | |

एष अक्षौहिणी-प्रमाण ॥

(२) उदा° ॥ कश्चिद् राजकुमार शङ्कर ।

(c) Interpreted

Apparently 3 *chamūs* = 1 *pṛtanā*

3 *pṛtanās* = 1 *anīkinī*

10 *anīkinīs* = 1 *akṣauhiṇī*.

The statement means: a *patti* consists of 1 *ratha* +1 *gaja* + 5 *nara* + 3 *turaga* (*i. e.*, 1 chariot + 1 elephant + 5 foot soldiers + 3 horsemen) and that an *akṣauhiṇī* contains $3^7.10$ of each of these :

$3^7.10.1$ chariots = 21,870 chariots

$3^7.10.1$ elephants = 21,870 elephants

$3^7.10.5$ footmen = 109,350 footmen

$3^7.10.3$ horsemen = 65,610 horsemen

Total 218,700

# उपोद्घात

प्रत्येक विद्यार्थ्यांच्या सर्वांगीण विकासाकरिता शिक्षणाचें माध्यम मातृभाषा असावें असे मानले जात असूनहि आजपर्यंत या देशांत मातृभाषेची नेहमी उपेक्षा होत गेली. म्हणून आतापर्यंत मातृभाषांत आधुनिक वैज्ञानिक विषयांवर ग्रंथहि लिहिले गेले नाहींत आणि ज्यांच्या आधारें ग्रन्थ लिहिता येतील असे पारिभाषिक शब्दहि नव्हते. अशा स्थितींत, कार्य कठीण असतांनाहि हिंदीला उच्च शिक्षणाचें माध्यम बनविण्याच्या स्तुत्य प्रयत्नांत सहकार्य करण्याच्या आन्तरिक प्रेरणेमुळे मी हिंदीमध्यें बीजगणित लिहिण्याचें कबूल केले आणि माध्यमिक परीक्षेकरिता जितके उपलब्ध ग्रंथ होते ते घेऊन त्यांतून सर्वग्राह्य होईल अशी सामग्री गोळा केली. पुस्तकाची रूपरेषा, त्याची सामग्री आणि विषयाचें योग्य विवरण यांवर पुरेसा वेळ घालवून मी हें पुस्तक लिहिण्यास प्रारंभ केला. यास सोपें आणि वाचनीय करण्याचा सर्वथैव प्रयत्न केला आहे. परिभाषा संपूर्ण विचारांना व्यक्त करणाऱ्या, संक्षिप्त आणि लवकर समजणाऱ्या बनविल्या आहेत. विषय समजण्यास सोपा करण्याकरिता प्रत्येक प्रकरणांत उदाहरणें दिलीं आहेत. उच्च गणितांत श्रेढ्यांचा अभिसार आणि अपसार हा विषय महत्वाचा असतो. त्याचा समावेश या पुस्तकाच्या कक्षेबाहेर आहे तरी तो विद्यार्थ्यांना समजण्यास सोपा जाईल या

दृष्टीनें त्याचा उल्लेख यांत केला आहे. छेद्यांचा अनंतापर्यंत योग कोणत्या प्रकारें करतां येतो हें गुणोत्तर श्रेढी आणि द्विपद प्रमेय या प्रकरणांत उदाहरणांसहित समजावून दिले आहे.

माझे पूज्य गुरु आणि महाकोशल महाविद्यालयाचे अनुभवी प्राध्यापक श्री. नी. अ. शास्त्री यांनी आपला पुष्कळसा वेळ खर्च करून योग्य त्या सुधारणा केल्या व बहुमोल सूचना दिल्या याबद्दल मी त्यांचा आभारी आहे.

या पुस्तकांतील सर्व पारिभाषिक शब्द प्रसिद्ध भाषाशास्त्री, आचार्य डॉ० रघुवीर यांनी दिले आहेत. त्यांच्या सतत साह्याने व प्रोत्साहनामुळेच बीजगणिताचे हें पुस्तक हिंदीमध्ये प्रस्तुत करण्याचें दुस्तर कार्य पुरें होऊं शकलें. मीच काय पण सारा देश त्यांच्या आंग्ल–भारतीय–महाकोशाकरिता त्यांचा ऋणी आहे.

मराठीमध्यें या पुस्तकाचा सुंदर अनुवाद कुमारी अहिल्या दाते बी. ए. (आनर्स) यांनी केला आहे. याकरिता मी त्यांना धन्यवाद देतो.

श्री. बी. के. पराडकर एम्. एस्सी. यांनी अनेक परिक्षांच्या प्रश्नपत्रांमधील प्रश्न एकत्र करून या पुस्तकांचं प्रश्नसंग्रह तयार करण्यांत मला विशेष मदत केली. डॉ. वि. भि. कोलते यांनी हें पुस्तक भाषेच्या दृष्टीनें वाचले आणि श्री. य. वि. ठोसर एम्. एस् सी. यांनी या पुस्तकाची प्रुफें तपासली त्याबद्दल मी या सर्वांचा आभारी आहे.

अयोध्याप्रसाद श्रीवास्तव

# अनुक्रमणिका



## बीजगणित

# बीजगणित

# प्रकरण पहिलें

१.१ पदसंहतींचें (expressions) वर्गीकरण (classification) तींत असलेल्या पदाच्या (terms) संख्येवरून करण्यांत येते. एकच पद असलेल्या राशीस एकपद (monomial), दोन पदें असलेल्या पदसंहतीस द्विपद (binomial), तीन पदें असलेल्या पदसंहतीस त्रिपद (trinomial) आणि ह्याप्रमाणेच अनेक पदें असलेल्या पदसंहतीस बहुपद (polynomial) पदसंहति म्हणतात.

कय, कय+ख, कय+खर+ग, ....................

$कय^{स} + खय^{स-१} + गय^{स-२} + \ldots\ldots + पय + फ$, ही क्रमशः एकपद, द्विपद, त्रिपद आणि बहुपद पदसंहतींची उदाहरणें आहेत.

१.२ चल (variable) आणि अचल (constant) राशि

उदाहरण— प्रतिशत प्रतिवर्ष ख सरळव्याज आकारून क रू० मुद्दलाची १, २, ३,......इत्यादि वर्षांनी येणारी रास य रू० ना दर्शविल्यास क, ख, आणि य यांमध्ये खालील संबंध निर्माण होतात.

पहिल्या वर्षा अखेर, $य = क + \frac{ख \times क}{१००}$

दुसऱ्या वर्षा अखेर, $य = क + \frac{२ख \times क}{१००}$

तिसऱ्या वर्षा अखेर, $य = क + \frac{३ख \times क}{१००}$

..........................................

..........................................

चवदाव्या वर्षा अखेर, $य = क + \frac{१४ख \times क}{१००}$

य ची अर्हा भिन्न मुदतीकरता भिन्न येते. परंतु क आणि ख मात्र प्रथमपासून शेवटपर्यंत उदाहरणांत तेंच राहतात. हें वरील संबंधावरून दिसून येते. म्हणून य ला चल राशी आणि क, ख ला अचल राशी म्हणतात.

१.२१ जेव्हा दोन चल राशींपैकी एकीची अर्हा दुसरीवर अवलंबून असते तेव्हा पहिल्या राशीला दुसऱ्या राशीचें श्रित (function) म्हणतात.

उदाहरणार्थ, $र = ३य + ५$ या संबंधांत

$य = १$ दिला असल्यास $र = ८$

$य = -\frac{१}{३}$ दिला असल्यास $र = ४$

म्हणून य ची अर्हा माहित असल्यास र ची अर्हा निश्चित होते. अर्थात् र ची अर्हा य च्या अर्हेवर अवलंबून आहे. परतु य ला इच्छनुसार वाटेल ती अर्हा घेता येते. म्हणून य-ला स्वतंत्र (independent) चल राशि आणि र ला परतंत्र (dependent) चल राशि म्हणतात.

संक्षेपार्थ, य ची निरनिराळी श्रितें श्रि(य), श्रा(य) श्री(य)......अशी लिहिलीं जातात.

याचप्रकारें जेव्हा एखाद्या चल राशीची अर्हा, दुसऱ्या काही चल राशींच्या अर्हांवर अवलंबून असते तेव्हा त्या चल राशीस अनेक चल राशींचें श्रित म्हणतात.

उदाहरण— $ल = ३य^२ + ५यर + २र^२ + ३य + २र + ७$

$= श्री (य, र)$

१.३ य चें परिमेय (rational) पूर्णांक (integral) बीजीय (algebraic) श्रित—

$क_० य^स + क_१ य^{स-१} + क_२ य^{स-२} + \ldots\ldots क_{स-१} य + क_स$

ह्या पदसंहतीत प्रत्येक पदांत य चा घात धन पूर्णांक असल्यास तिला य चें परिमेय पूर्णांक बीजीय श्रित म्हणतात.

ह्या परिभाषेत केवळ 'य' लाच चल मानल्यामुळे केवळ त्याचाच विचार केला आहे. त्यामुळे $क_०, क_१, क_२ \ldots\ldots क_न$ हे गुणक अपरिमेय किंवा भिन्न असले तरी वरील पदसंहति य चें परिमेय पूर्णांक श्रितच राहते.

१.४ बीजीय श्रितांत (algebraic functions) चल राशींचा उच्चतम घात एक, दोन, तीन......किंवा स असल्यास त्या श्रितांना क्रमशः एकघाती, द्विघाती, त्रिघाती ......किंवा स घाती श्रितें म्हणतात.

अनुच्छेद १.३ मध्यें दिलेल्या पदसंहतीत य या चल राशीचा उच्चतम घात स असल्यामुळें ती पदसंहति 'स-घाती श्रित' आहे.

त्याचप्रमाणे, कय+ख, कय$^2$+खय+ग हीं क्रमशः एकघाती व द्विघाती बीजीय श्रितांचीं उदाहरणें आहेत. एकघाती आणि द्विघाती श्रितांना क्रमशः रेखीय (linear) आणि वर्गीय (quadratic) श्रितें असेंहि म्हणतात.

त्याचप्रमाणे य आणि र या दोन चल राशींच्या एकघाती आणि द्विघाती श्रितांची कय+खर+ग आणि कय$^2$+खयर +गर$^2$+घय+चर+ज हीं उदाहरणें आहेत.

१.५ समानघाती (homogeneous) श्रितें— जेव्हा य आणि र यांच्या परिमेय पूर्णांक श्रितांतील प्रत्येक पदाचा घात तोच असतो तेव्हा त्या श्रितास समानघाती श्रित म्हणतात.

उदाहरण— कय+खर, कय$^2$+खयर+गर$^2$ हीं य आणि र यांचीं क्रमशः समान एकघाती, समान-द्विघाती श्रितें आहेत. वरील उदाहरणांत क, ख आणि ग ह्या कोणत्याहि अचल राशी आहेत.

संमितीय (symmetrical) श्रितें— दोन चल राशींच्या परिमेय पूर्णांक श्रितांत चल राशींच्या व्यतिहरणामुळे (interchange) परिवर्तन घडत नसल्यास त्या श्रितास त्या दोन राशींचें संमितीय श्रित म्हणतात.

परिमेय पूर्णांक श्रितांत दोहोंपेक्षा अधिक चल राशी असतील आणि त्यांतील कोणत्याहि दोन राशींच्या व्यतिहरणामुळे त्यांत परिवर्तन घडून येत नसेल तर त्या श्रितास संमितीय श्रित म्हणतात.

उदाहरण १— कय$^4$+खय$^3$र+गय$^2$र$^2$+खयर$^3$+ कर$^4$ हें य आणि र यांचें संमितीय श्रित आहे.

उदाहरण २— क+ख $(य^2+र^2+ल^2)$+य (रल +लय+यर) हें य, र आणि ल यांचें संमितीय धित आहे.

१.६ समीकार (equation)— अव्यक्त (unknown) राशींच्या दोन पदसंहतींच्या समीकरणानें समीकार निर्माण होतो. समीकारामध्ये एक किंवा अधिक अव्यक्त राशी, त्याचप्रमाणे कांहीं अचल राशी असतात.

समीकारांतील अव्यक्त राशीचा उच्चतम घात हाच त्या समीकाराचा घात मानला जातो.

अव्यक्त राशीच्या ज्या अर्हेमुळें समीकाराचें समाधान होतें (satisfies) तिला समीकाराचें मूळ (root) म्हणतात.

समीकारांतील अव्यक्तांना कोणतीहि अर्हा दिली असतांना जर समीकाराचें समाधान होत असेल तर त्या समीकारांस ऐकात्म्य (identity) म्हणतात.

उदाहरण— $$\frac{य}{य-क}+\frac{य}{य-ख}+\frac{य}{य-ग}$$
$$=\frac{क}{य-क}+\frac{ख}{य-ख}+\frac{ग}{य-ग}+३$$

ह्या समीकाराचें, य च्या कोणत्याहि एका अर्हेनें समाधान होतें म्हणून हा समीकार ऐकात्म्य आहे.

जेव्हा अव्यक्ताच्या विशिष्ट अर्हेकरिता समीकाराचें समाधान होतें तेव्हा त्यास प्रतिबंधी समीकार (conditional equation) म्हणतात.

उदाहरण— $य^2-५य+६=०$ चें समाधान य च्या २ किंवा ३ या अर्हांनी होतें. म्हणून हा प्रतिबंधी समीकार

आहे. साधारणतः, प्रतिबंधी समीकारापेवजी समीकार हाच शब्द वापरला जातो.

= हें चिह्न समीकारदर्शक असून ≡ हें चिह्न ऐकात्म्य दर्शक आहे.

१.७ तिर्यग् गुणनाचा (cross-multiplication) नियम

$$क_1य + ख_1र + ग_1 = ० \quad \text{..................(अ)}$$

$$क_2य + ख_2र + ग_2 = ० \quad \text{..................(आ)}$$

वरील समीकार सोडवावयाचे असल्यास (अ) समीकारास $ख_2$ ने आणि (आ) समीकारास $ख_1$ ने गुणा. नंतर (अ) समीकारांतून (आ) समीकार उणा करा म्हणजे—

$$य\,(क_1ख_2 - ख_1क_2) + ख_2ग_1 - ख_1ग_2 = ०$$

$$\text{अर्थात्}\ य = \frac{ख_1ग_2 - ख_2ग_1}{क_1ख_2 - क_2ख_1} \quad \text{..................(इ)}$$

आता (अ) किंवा (आ) यांमध्यें य च्या जागी त्याच्या प्राप्त अर्हचा आदेश (substitution) करा. म्हणजे—

$$र = \frac{ग_1क_2 - क_1ग_2}{क_1ख_2 - ख_1क_2} \quad \text{..................(ई)}$$

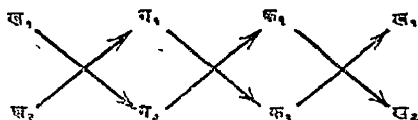
(इ) आणि (ई) हीं फलें खालील प्रमाणे एकत्र लिहितां येतात.

$$\frac{य}{ख_1ग_2 - ख_2ग_1} = \frac{र}{ग_1क_2 - क_1ग_2} = \frac{१}{क_1ख_2 - ख_1क_2},$$

य, र आणि १ ह्यांच्या हरावरून असे प्रतीत होतें की (अ) आणि (आ) सारखे समीकार सोडवितांना य आणि र

यांच्या अर्हा, खाली दिलेल्या पद्धतीनुसार एकदम काढतां येतात.

(अ) आणि (आ) या समीकारांतील र चे गुणक, स्थिरपदें, य चे गुणक आणि पुन्हा र चे गुणक क्रमशः पुढें दर्शविल्याप्रमाणे लिहा.




बाणद्वारा सांधलेल्या गुणकांचे गुणाकार करा. अधोमुख बाणाने निर्दिष्ट केलेल्या गुणाकारांतून उन्मुख बाणाने निर्दिष्ट केलेला गुणाकार उणा करा. अशा प्रकारे येणाऱ्या राशी क्रमशः य, र आणि १ यांच्याशी अनुपाती (proportional) असतात. म्हणून—

$$\frac{\text{य}}{\text{ख}_1\text{ग}_2-\text{ग}_1\text{ख}_2}=\frac{\text{र}}{\text{ग}_1\text{क}_2-\text{क}_1\text{ग}_2}=\frac{1}{\text{क}_1\text{ख}_2-\text{ख}_1\text{क}_2}$$

## प्रश्नसंग्रह १

पुढील समीकार सोडवा —

(१) ३य−२र−१=०
    ५य−३र−३=०

(२) $य+र-१५=०$
$४य+३र-५२=०$

(३) $२य-४र+७=०$
$४य+६र-२१=०$

(४) $३य+६र-१०=०$
$२य-र+५=०$

# प्रकरण दुसरें

## घातांक नियम

(laws of indices)

२.१ जेव्हा स हा एक धन पूर्णांक असतो तेव्हा क ला क न स वेळां गुणून येणारा गुणाकार $क^{स}$ ने दर्शविला जातो. अर्थात्

$क^{स} = क \times क \times क \times \ldots\ldots$ स वेळां

वरील $क^{स}$ च्या परिभाषेत क ला आधार (base), आणि स ला क आधाराचा घातांक (index) म्हणतात.

वर दिलेल्या परिभाषेच्या साह्याने पुढे दिलेले घातांक नियम सिद्ध करतां येतात.

अन्यथा उल्लेख केल्याशिवाय आधाराचा घात नेहमी धन पूर्णांकच समजला जाईल.

२.२ घातांक नियम—

(१) $क^{य} \times क^{र} = क^{य+र}$

(२) $क^{य} \div क^{र} = क^{य-र}$ जेव्हा $य > र$

$= \frac{१}{क^{र-य}}$ जेव्हा $य < र$

(३) $(\text{क}^{\text{य}})^{\text{र}} = \text{क}^{\text{यर}}$

(४) $(\text{कख})^{\text{य}} = \text{क}^{\text{य}} \times \text{ख}^{\text{य}}$

(५) $\left(\frac{\text{क}}{\text{ख}}\right)^{\text{य}} = \frac{\text{क}^{\text{य}}}{\text{ख}^{\text{य}}}$

२.३ (१) य आणि र धन पूर्णांक असल्यास

$$\text{क}^{\text{य}} \times \text{क}^{\text{र}} = \text{क}^{\text{य+र}}$$

आता, परिभाषेनुसार

$$\text{क}^{\text{य}} = \text{क} \times \text{क} \times \ldots\ldots \text{ य वेळां}$$

$$\text{आणि } \text{क}^{\text{र}} = \text{क} \times \text{क} \times \ldots\ldots \text{ र वेळां}$$

म्हणून $\text{क}^{\text{य}} \times \text{क}^{\text{र}} = (\text{क} \times \text{क} \times \ldots \text{य वेळां})\ (\text{क} \times \text{क} \times \ldots \text{र वेळां})$

$$= \text{क} \times \text{क} \times \ldots\ldots (\text{य} + \text{र}) \text{ वेळां}$$

$$= \text{क}^{\text{य+र}}$$ (परिभाषेनुसार

उपसिद्धांत (corollary)— हेंच फल अधिक विस्तृत स्वरुपांत मांडता येतें.

जर ल हाहि धन पूर्णांक असेल तर

$$\text{क}^{\text{य}} \times \text{क}^{\text{र}} \times \text{क}^{\text{ल}} = \text{क}^{\text{य+र}} \times \text{क}^{\text{ल}}$$

$$= \text{क}^{\text{य+र+ल}}$$

सामान्यतः क चा प्रत्येक घात धन पूर्णांक असल्यास

$$\text{क}^{\text{य}} \times \text{क}^{\text{र}} \times \text{क}^{\text{ल}} \times \text{क}^{\text{व}} \times \ldots\ldots = \text{क}^{\text{य+र+ल+व+}\ldots\ldots}$$

(२) य आणि र धन पूर्णांक असल्यास

$$\text{क}^{\text{य}} \div \text{क}^{\text{र}} = \text{क}^{\text{य-र}} \quad \text{जेव्हा } \text{य} > \text{र}$$

$$= \frac{१}{\text{य}^{\text{र-य}}} \quad \text{जेव्हा } \text{य} < \text{र}$$

समजा य > र

$$क^{य} \div क^{र} = \frac{क^{य}}{क^{र}}$$

$$= \frac{क \times क \times क \times \ldots य \text{ वेळां}}{क \times क \times क \times \ldots र \text{ वेळां}}$$

(परिभाषेनुसार

अंश आणि छेद यांच्यांतील र साधारण अवयवांचा लोप करून

$$= क \times क \times क \times \ldots\ldots (य - र) \text{ वेळां}$$

$$= क^{य-र}$$ (परिभाषेनुसार

आता य < र आहे असे समजा.

$$क^{य} \div क^{र} = \frac{क \times क \times \ldots\ldots य \text{ वेळां}}{क \times क \times \ldots\ldots र \text{ वेळां}}$$

अंश आणि छेद यांच्यांतील य साधारण अवयवांचा लोप करून

$$= \frac{१}{क \times क \times \ldots\ldots (र - य) \text{ वेळां}}$$

$$= \frac{१}{क^{र-य}}$$ (परिभाषेनुसार

(३) य आणि र धन पूर्णांक असल्यास

$$(क^{य})^{र} = क^{यर}$$

$(क^{य})^{र} = क^{य} \times क^{य} \times क^{य} \ldots र$ वेळां

$= (क \times क \times \ldots य \text{ वेळां}) \times (क \times क \times \ldots य \text{ वेळां}) \times \ldots$

$(क \times क \times क \times \ldots य \text{ वेळां}) \times \ldots$ असे र अवयवापर्यंत

$= क \times क \times क \times \ldots यर$ वेळां

$= क^{यर}$ (परिभाषेनुसार

उपसिद्धांत— $(क^{य})^{र} = (क^{र})^{य} = क^{यर}$

(४) य घन पूर्णांक असल्यास

$(क \times ख)^{य} = क^{य} \times ख^{य}$ (परिभाषेनुसार

$(क \times ख)^{य} = कख \times कख \times कख \ldots \times$ य वेळां

$= (क \times क \times क \times \ldots$ य वेळां$) \times$

$(ख \times ख \times ख \times \ldots$ य वेळां$)$

$= क^{य} \times ख^{य}$ (परिभाषेनुसार

उपसिद्धांत— $(कखग)^{य} = क^{य} \times ख^{य} \times ग^{य}$

किंवा सामान्यतः $(क \times ख \times ग \times घ \ldots)^{य}$

$= क^{य} \times ख^{य} \times ग^{य} \times घ^{य} \times \ldots\ldots$

ह्यावरून, अनेक राशींच्या गुणाकाराचा य वा घात हा त्यांतील प्रत्येक राशीच्या य व्या घातांच्या गुणाकारासमान असतो.

(५) य हा घन पूर्णांक असल्यास

$\left(\frac{क}{ख}\right)^{य} = \frac{क^{य}}{ख^{य}}$ (परिभाषेनुसार

$\left(\frac{क}{ख}\right)^{य} = \frac{क}{ख} \times \frac{क}{ख} \times \frac{क}{ख} \times \ldots\ldots$ य वेळां

$= \frac{क \times क \times क \ldots \times \text{य वेळां}}{ख \times ख \times ख \times \ldots \text{य वेळां}}$

$= \frac{क^{य}}{ख^{य}}$ (परिभाषेनुसार

ह्यावरून दोन राशींच्या लब्धीचा य वा घात हा त्या राशींच्या य व्या घातांच्या लब्धीसमान असतो.

खालील फलाचें सत्यापन (verification) सहज करतां यइल.

$$\left(\frac{क^{य} \times ख^{र} \times \dots}{ग^{ल} \times \dots}\right)^{म} = \frac{क^{मय} \times ख^{मर} \times \dots\dots\dots\dots}{ग^{मल} \times \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$

२.४ धन आणि ऋण राशींचे घात— धन राशींचा गुणाकार, त्यांची संख्या कितीहि असली तरी, सदा धनच असतो, म्हणून एखाद्या धन राशीचा घात सम (even) किंवा विषम (odd) कोणताहि असला तरी तिचें त्या घातास उन्नयन करून येणारी राशी धनच असते.

उलट, ऋण राशींच्या गुणाकाराचें चिन्ह अवयवांच्या संख्येवर अवलंबून असतें.

कारण, ऋण राशीच्या अवयवांची संख्या सम असल्यास गुणाकार धन असतो, आणि ऋण राशींच्या अवयवांची संख्या विषम असल्यास गुणाकार ऋण असतो.

हें विधान खालील उदाहरणांवरून स्पष्ट होईल.

$(-य)^{२} = (-य)\,(-य) = य^{२}$

$(-य)^{३} = (-य)^{२}\,(-य) = य^{२}(-य) = -य^{३}$

$(-य)^{४} = (-य)^{२}\,(-य)^{२} = य^{२} \times य^{२} = य^{४}$

आणि सामान्यतः

$$(-य)^{२स} = \left[(-य)^{२}\right]^{स} = (य^{२})^{स} = य^{२स}$$

$$(-य)^{२स+१} = (-य)^{२स}(-य) = -य^{२स} \times य = -य^{२स+१}$$

२.५ धन पूर्णांक व्यतिरिक्त घात— म, य आणि र हे धन पूर्णांक नसल्यास $क^{स}$ ची (२.१) मध्यें दिलेली परिभाषा

आणि तदनुसार प्रतिपादित घातांक नियम अर्थहीन होतात हें आपणास लक्षांत ठेवलें पाहिजे.

उदाहरणार्थ — $३^{४}$ मध्ये ४ वरून अवयवांची संख्या ४ आहे असा बोध होतो.

परंतु $५^{-\frac{१}{२}}$ किंवा $७^{-४}$ वरून ५ला ५ ने $(-\frac{१}{२})$ वेळां किंवा ७ ला ७ ने (−४) वेळां गुणावें असें म्हटल्यास अर्थबोध होत नाही.

आता, वर सिद्ध केलेले घातांकनियम हे य आणि र च्या धन वा ऋण वा पूर्णांक वा भिन्न अर्हांकरिता सत्य आहे असें गृहीत धरूं आणि त्यावरून स ची वाटेल ती अर्हा (धन किंवा ऋण किंवा भिन्न) असतांना $क^{स}$ चा अर्थ लावूं.

२.६ स हा $\frac{१}{र}$ सारखा भिन्न आणि र धन पूर्णांक असल्यास $क^{स}$ अर्थात् $क^{\frac{१}{र}}$ चा अर्थ लावणें.

$क^{\frac{१}{र}} \times क^{\frac{१}{र}} \times क^{\frac{१}{र}} \times$ ..........र वेळां

$= क^{\frac{१}{र}+\frac{१}{र}+\frac{१}{र}+\cdots\cdots र \text{ पदांपर्यंत}}$

$= क^{\frac{१}{र}\times र}$ (पहिल्या नियमानुसार

$=क$

पण परिभाषेनुसार वाम पक्ष, $[क^{\frac{१}{र}}]^{र}$ असाहि लिहितां येतो.

अर्थात् $[क^{\frac{१}{र}}]^{र} = क$

म्हणून $क^{\frac{१}{र}}$ चा $र^{वा}$ घात क आहे अर्थात् क चें $र^{वें}$

मूळ $क^{१}$ ने प्रतिरूपित केलें जातें.

२.६१ स=० असतांना $क^{स}$ चा अर्थात् $क^{०}$ चा अर्थ लावणें— य आणि र च्या धन, ऋण, पूर्णांक किंवा भिन्न अर्हा असतांना घातांक नियम सिद्ध समजल्यास दुसऱ्या घातांक नियमानुसार

$$\frac{क^{य}}{क^{र}} = क^{य-र}$$

आता र=य घ्या

म्हणून $\frac{क^{य}}{क^{य}} = क^{य-य}$

किंवा $१ = क^{०}$

अर्थात् $क^{०} = १$

हें फल क च्या शून्य अर्हव्यतिरिक्त सर्व अर्हांकरिता सत्य आहे.

२.६२ स= −र असतांना $क^{स}$ चा अर्थात् $क^{-र}$ चा अर्थ लावणें.

$$\begin{aligned} क^{र} \times क^{-र} &= क^{र-र} \\ &= क^{०} \\ &= १ \end{aligned}$$

म्हणून $क^{-र} = \frac{१}{क^{र}}$

२.६३ जिचा छेद धन पूर्णांक असून जी दोन पूर्णांक राशींनी तयार होते अशा लब्धीच्या रूपांत प्रत्येक मिश्र राशि व्यक्त करतां येते.

$\frac{त}{थ}$ ह्या राशींत त धन किंवा ऋण पण थ धन पूर्णांक असल्यास [आणि स $= \frac{त}{थ}$ असल्यास $क^{स}$ चा अर्थात] $क^{\frac{त}{थ}}$ ह्या अर्थ लावूं.

पहिल्या घातांक नियमानुसार

$$क^{\frac{त}{थ}} \times क^{\frac{त}{थ}} \times क^{\frac{त}{थ}} \times \ldots\ldots \text{ थ वेळां}$$

$$= क^{\left(\frac{त}{थ} + \frac{त}{थ} + \frac{त}{थ} + \ldots\ldots \text{थ पदापर्यंत}\right)}$$

$$= क^{थ \times \frac{त}{थ}}$$

$$= क^{त}$$

परंतु वाम पक्ष $= \left(क^{\frac{त}{थ}}\right)^{थ}$

म्हणून $\left(क^{\frac{त}{थ}}\right)^{थ} = क^{त}$

अर्थात् $\left(क^{\frac{त}{थ}}\right)$ चा थ वा घात $क^{त}$ आहे.

म्हणून $क^{\frac{त}{थ}}$ हें $क^{त}$ चें थ वें मूळ आहे.

पुन्हा तिसऱ्या घातांक नियमानुसार

$$\left(क^{\frac{1}{थ}}\right)^{त} = क^{\frac{त}{थ}}$$

म्हणून $क^{\frac{त}{थ}}$ ही $\left(क^{\frac{1}{थ}}\right)^{त}$ अशीहि लिहितां येते.

ह्याचा अर्थ असा की $क^{\frac{त}{थ}}$ हा $क^{\frac{1}{थ}}$ चा त वा घात आहे.

२.७ कांही उदाहरणें—

उदाहरण १— संक्षिप्त रूप द्या.

(अ) $३^{४} \times ३^{७}$ (आ) $\frac{२^{५}}{२^{४}}$ (इ) $(३^{२})^{५}$

(ई) $(३ \times २)^{५}$ (उ) $(\frac{३}{५})^{४}$

आता (अ) $३^{४} \times ३^{७} = ३^{४+७} = ३^{११}$

(आ) $\frac{२^{५}}{२^{४}} = २^{५-४} = २$

(इ) $(३^{२})^{५} = ३^{५ \times २} = ३^{१०}$

(ई) $(३ \times २)^{५} = ३^{५} \times २^{५} = २४३ \times ३२ = ७७७६$

(उ) $(\frac{३}{५})^{४} = \frac{३^{४}}{५^{४}} = \frac{८१}{६२५}$

उदाहरण २ — पुढील राशि धन घात असलेल्या राशींत व्यक्त करा.

(अ) $३^{-२} \times ३^{-४} \times ३^{३}$ (आ) $\frac{४^{-४} \times र^{४} \times य^{-३}}{४^{-३} \times र^{२} \times य^{२}}$

आता (अ)

$$३^{-२} \times ३^{-४} \times ३^{३} = ३^{-२-४+३}$$
$$= ३^{-३}$$
$$= \frac{१}{३^{३}}$$
$$= \frac{१}{२७}$$

(आ) $\frac{४^{-४} \times र^{४} \times य^{-३}}{४^{-३} \times र^{२} \times य^{२}}$

$$=\frac{र^{४-२}}{४^{४-३}\times य^{२+३}}$$

$$=\frac{र^{२}}{४\times य^{५}}$$

उदाहरण ३ — संक्षिप्त रूप द्या.

$$\left[\frac{३य^{३}र^{३}ल}{य^{\frac{५}{३}}\times र^{५}}\right]^{-\frac{२}{३}}\times\left[\frac{य^{५}\times ल^{५}}{र^{\frac{५}{३}}}\right]^{-\frac{१}{५}}$$

$$\left[\frac{३य^{३}र^{३}ल}{य^{\frac{५}{३}}\times र^{५}}\right]^{-\frac{२}{३}}\times\left[\frac{य^{५}\times ल^{५}}{र^{\frac{५}{३}}}\right]^{-\frac{१}{५}}$$

$$=\frac{३^{-\frac{२}{३}}\times य^{-२}\times र^{-२}ल^{-\frac{२}{३}}}{य^{-\frac{१०}{९}}\times र^{-\frac{१०}{३}}}\times\frac{य^{-१}ल^{-१}}{र^{-\frac{१}{३}}}$$

$$=\frac{१}{३^{\frac{२}{३}}}\times\frac{र^{\frac{१०}{३}+\frac{१}{३}-२}}{य^{२+१-\frac{१०}{९}}\times ल^{१+\frac{२}{३}}}$$

$$=\frac{१}{३^{\frac{२}{३}}}\times\frac{र^{\frac{५}{३}}}{य^{\frac{१७}{९}}\times ल^{\frac{५}{३}}}$$

उदाहरण ४— सरळरूप द्या—

$$\frac{१}{१+क^{य-र}+क^{य-ल}}+\frac{१}{१+क^{र-ल}+क^{र-य}}+\frac{१}{१+क^{ल-य}+क^{ल-र}}$$

$$\text{पदसंहति}=\frac{क^{-य}}{क^{-य}+क^{-र}+क^{-ल}}+\frac{क^{-र}}{क^{-र}+क^{-ल}+क^{-य}}$$

$$+\frac{क^{-ल}}{क^{-ल}+क^{-य}+क^{-र}}$$

$$=\frac{क^{-य}+क^{-र}+क^{-ल}}{क^{-य}+क^{-र}+क^{-ल}}$$

$$=१$$

उदाहरण ५—

$क^{\frac{२}{३}}+क^{\frac{१}{३}}ख^{\frac{१}{३}}+ख^{\frac{२}{३}}$ ला $क^{\frac{१}{३}}-ख^{\frac{१}{३}}$ ने गुणा

$$
\begin{array}{l}
\quad क^{\frac{२}{३}}+क^{\frac{१}{३}}ख^{\frac{१}{३}}+ख^{\frac{२}{३}} \\
\qquad\qquad क^{\frac{१}{३}}-ख^{\frac{१}{३}} \\
\hline
क+क^{\frac{२}{३}}ख^{\frac{१}{३}}+क^{\frac{१}{३}}ख^{\frac{२}{३}} \\
\quad -क^{\frac{२}{३}}ख^{\frac{१}{३}}-क^{\frac{१}{३}}ख^{\frac{२}{३}}-ख \\
\hline
क \qquad\qquad\qquad\qquad -ख
\end{array}
$$

म्हणून इष्ट गुणाकार (क − ख) आहे.

## प्रश्नसंग्रह २

(१) धन घात असणाऱ्या राशींत व्यक्त करा—

(अ) $य^{३}\times र^{-४}$ (आ) $य^{-\frac{१}{२}}$ (इ) $र^{-\frac{४}{५}}$

(ई) $\dfrac{य^{\frac{१}{५}}\times र^{-\frac{३}{४}}}{य^{-\frac{२}{५}}\times र^{\frac{७}{८}}}$ (उ) $य^{\frac{२}{३}}\times य^{-\frac{५}{३}}$

(ऊ) $\dfrac{य^{-\frac{१}{८}} \times र^{-\frac{१}{६}}}{य^{\frac{३}{८}} \times र^{\frac{२}{६}}}$

(२) खालील राशींच्या अर्हा काढा—

(अ) $८^{\frac{२}{३}}$ (आ) $२७^{\frac{१}{४}} \times ३^{-\frac{१}{४}}$ (इ) $\dfrac{१६^{\frac{३}{२}} \times ८१^{-\frac{३}{४}}}{८^{\frac{१}{३}}}$

(ई) $\left(\dfrac{१२५}{६४}\right)^{-\frac{२}{३}}$

(३) सरळरूप द्या— $\dfrac{य^{७} \times (र \times ल)^{४} (ल^{२})^{३} [य^{२} र^{२} ल]^{२}}{[य^{३} \times र \times ल^{२}]^{४}}$

(४) $[३^{२}]^{२^{२}}$ आणि $३^{२^{२^{२}}}$ यांपैकी कोणती संख्या मोठी आहे?

(५) सरळरूप द्या— $\dfrac{३^{३^{२}}}{४(३^{३})^{२}}$

(६) (अ) $य^{\frac{२}{३}} + य^{\frac{१}{३}} + १$ हिला $य^{\frac{१}{३}} - १$ ने गुणा

(आ) $य^{\frac{१}{२}} + य^{\frac{१}{४}} र^{\frac{१}{४}} + र^{\frac{१}{२}}$ हिला $य^{\frac{१}{४}} - र^{\frac{१}{४}}$ ने गुणा

(इ) $(२य + १ + २य^{-१})$ हिला $(२य - १ + २य^{-१})$ ने गुणा

(७) $य^{३} - र^{३}$ हिला $य^{\frac{१}{३}} - र^{\frac{१}{३}}$ ने भागा

(८) खालील पदसंहतींना सरळरूपें द्या—

(क) $\left[\frac{य^{\frac{३}{४}}}{र^{\frac{४}{३}}}\right]^{३} \left[\frac{र^{\frac{३}{४}}}{ल^{\frac{४}{३}}}\right]^{४} \left[\frac{ल^{\frac{३}{४}}}{य^{\frac{४}{३}}}\right]^{५}$

(ख) $[य^{त}+र^{थ}]\,[र^{-थ}-य^{-त}]$

(ग) $[य^{\frac{१}{२}} \times र^{\frac{२}{३}}] \times [य^{\frac{११}{३}} \times र^{-\frac{१}{३}}] \div य^{\frac{१}{३}} \times र^{\frac{१}{३}}$

(घ) $[य^{\frac{४}{५}} \times र^{\frac{१}{५}}]^{२} \times \left[\frac{र^{-१}ल^{५}}{य^{\frac{२}{५}}}\right]^{\frac{१}{३}} \div य^{\frac{२}{५}} \times ल^{\frac{१}{५}}$

(ङ) $\left(\frac{य^{ट}}{य^{ठ}}\right)^{ट+ठ} \times \left(\frac{य^{ठ}}{य^{ड}}\right)^{ठ+ड} \times \left(\frac{य^{ड}}{य^{ट}}\right)^{ड+ट}$

[कलकत्ता १९००

(च) $\left[\frac{य^{त}}{य^{थ}}\right]^{त+थ} \div \left[\frac{य^{त+थ}}{य^{त-थ}}\right]^{\frac{त३}{थ}}$ [कलकत्ता १९०२

(छ) $\left[\frac{य^{ड}}{य^{ट}}\right]^{ड} \times \left[\frac{य^{ट}}{य^{ड}}\right]^{ट} \div [(य^{ड})^{ड}\,(य^{ट})^{ट}] \times$

$[(य^{ट})^{ड}\,(य^{ड})^{ट}]$ [कलकत्ता १९०३

(ज) $\left[\frac{य^{ड}}{य^{ट}}\right]^{ड^{२}+ड\times ट+ट^{२}} \times \left[\frac{य^{ट}}{य^{ठ}}\right]^{ट^{२}+टठ+ठ^{२}} \times$

$\left[\frac{य^{ठ}}{य^{ड}}\right]^{ठ^{२}+ट\times ड+ड^{२}}$ [कलकत्ता १९०४

(९) जर $र = य + य^{-१}$ असेल तर
(क) $य^{२}+य^{-२}$ (ख) $य^{३}+य^{-३}$ आणि $य^{४}+य^{-४}$

यांना र च्या पदांत व्यक्त करा.

(१०) जर $क^{\frac{1}{3}}+ख^{\frac{1}{3}}+ग^{\frac{1}{3}}=0$ असेल तर $[क+ख+ग]^3$ $= २७\times क\times ख\times ग$ हें दाखवा

(११) $य^{\frac{1}{4}}+र^{\frac{1}{4}}+ल^{\frac{1}{4}}=0$ या समीकारांतील य, र आणि ल चे घात, पूर्णांक करण्यासाठी अवश्य तेवढीं परिवर्तनें करून, त्याचें

$$[य^2+र^2+ल^2-२रल-२लय-२यर]^2$$
$$=१२८\, यरल\, (य+र+ल)$$

यांत परिवर्तन होतें हे दाखवा.

(१२) जर $क^य=ख$, $ख^र=ग$ आणि $ग^ल=क$ तर $यरल=१$ हें दाखवा

(१३) जर $क^य=ठ$, $क^र=ट$ आणि $क^2=[ठ^र\times ट^य]^ल$ तर $यरल=१$ हें दाखवा

(१४) जर $क^{म+न}=[क^म]^न$ तर म ची अर्हा न च्या पदांत व्यक्त करा.

# प्रकरण तिसरें

## करणी (surd) राशी आणि संकर (complex) राशी

३.१ स हा धन पूर्णांक असल्यास $\sqrt[स]{क}$ ह्या राशीला मूळ म्हणतात.

$\sqrt{\ }$ ह्या मूळ चिन्हाखाली असणाऱ्या क ह्या राशीला आधार (base) आणि स ला मूळाचा घातांक (index) म्हणतात.

दुसऱ्या, तिसऱ्या.........इत्यादि वर्णांच्या (order) मूळांना क्रमशः द्विघाति, त्रिघाति......मूळें म्हणतात.

३.२ मूळांचें प्रहसन (reduction)— अशा राशीनेहि मूळगत राशि व्यक्त करतां येते.

उदाहरणार्थ $\sqrt[स]{क} = फ^{\frac{१}{स}}$

घातांक नियमाच्या साहाने खालील संबंध सहज सिद्ध करतां येतात.

(१) $(\sqrt[ट]{क})^{ठ} = \sqrt[ट]{क^{ठ}} = क^{\frac{ठ}{ट}}$

(२) $(\sqrt[ठ]{\sqrt[ट]{क}}) = \sqrt[टठ]{क} = क^{\frac{१}{टठ}}$

(३) $\sqrt[टत]{क^{ठत}} = (क^{ठत})^{\frac{१}{टत}} = क^{\frac{ठ}{ट}}$

(४) $\sqrt[ट]{क} \times \sqrt[ट]{ख} = \sqrt[ट]{कख} = क^{\frac{1}{ट}} \times ख^{\frac{1}{ट}}$

(५) $\dfrac{\sqrt[ट]{क}}{\sqrt[ट]{ख}} = \sqrt[ट]{\dfrac{क}{ख}} = \dfrac{क^{\frac{1}{ट}}}{ख^{\frac{1}{ट}}}$

३२ स हा घन पूर्णांक असल्यास $क^{स}$ ची अर्हा नेहमीच पूर्णतः काढतां येते परंतु स घन पूर्णांक नसल्यास कांही कांही वळां $क^{स}$ ची अर्हा पूर्णतः निश्चित करता येत नाही. उदाहरणार्थ—४, ९, २.२५, ६.२५ यांचीं वर्गमूळें क्रमशः २ ३ १.५, २.५ ह्या परिमेय राशी येतात. परंतु २, ३.५ यांचीं वर्गमूळें किंवा २५, ३१ यांचीं घनमूळें काढण्याचा प्रयत्न केल्यास ती परिमेय राशींच्या रूपांत येत नाहींत असें दिसून येते.

क ही दिलेली राशि दुसऱ्या एखाद्या राशीचा पूर्ण स वा घात नसल्यास $\sqrt[स]{क}$ या राशीला करणी किंवा अपरिमेय राशि म्हणतात.

३३१ कोणत्याहि दोन करणी राशींचें समवर्ण करणी राशींमध्ये परिवर्तन करतां येतें.

उदाहरणार्थ— $\sqrt[ट]{क}$ आणि $\sqrt[ठ]{ख}$ ह्या राशी क्रमशः $\sqrt[टठ]{क^{ठ}}$ आणि $\sqrt[टठ]{ख^{ट}}$ अशाहि व्यक्त करतां येतात.

ह्या पद्धतीने, दिलेल्या राशींच्या अर्हा न काढतां त्यांपैकी मोठी कोणती हें ठरवितां येतें. त्याचप्रमाणे दोन करणींचा गुणाकार किंवा भागाकार करतां येतो.

उदाहरण १ — $\sqrt[3]{१७}$ आणि $\sqrt{११}$ यापैकी मोठी राशि कोणती ?

दोघांचाहि करणीघात समान केल्यास

$$\sqrt[3]{१७} = \sqrt[6]{१७^{२}}$$
$$= \sqrt[6]{२८९}$$

$$\sqrt{११} = \sqrt[6]{११^{३}}$$

$$= \sqrt[6]{१३३१}$$

म्हणून $\sqrt{११}$ ही राशि $\sqrt[3]{१७}$ पेक्षा मोठी आहे.

उदाहरण २— $\sqrt{७}$ ला $\sqrt[3]{५}$ ने गुणा.

$$\sqrt{७} \times \sqrt[3]{५} = \sqrt[6]{७^{३}} \times \sqrt[6]{५^{२}}$$

$$= \sqrt[6]{७^{३} \times ५^{२}}$$

$$= \sqrt[6]{८५७५}$$

उदाहरण ३—

$\sqrt[3]{२}$ ला $\sqrt{३}$ ने भागा.

$$\sqrt[3]{२} \div \sqrt{३} = \sqrt[6]{४} \div \sqrt[6]{२७}$$
$$= \sqrt[6]{\frac{४}{२७}}$$

२.४ क ही परिमेय आणि $\sqrt{ख}$ अपरिमेय राशि असल्यास $क + \sqrt{ख}$ ही राशि वास्तविक राशीचें अति सामान्य रूप आहे.

$क + \sqrt{ख}$ आणि $क - \sqrt{ख}$ यांना अनुबद्ध (conjugate) वर्ग-करणी (quadratic surds) म्हणतात.

दोन अनुबद्ध वर्ग करणींचा योग तसेंच त्यांचा गुणाकार परिमेय असतात.

उदाहरण— $(क + \sqrt{ख}) + (क - \sqrt{ख}) = २ क$ परिमेय राशि

$(क + \sqrt{ख})(क - \sqrt{ख}) = क^२ - ख$ परिमेय राशि.

एखाद्या उदाहरणाचें उत्तर अपूर्णांकाच्या रूपांत येऊन त्याच्या हरांत $क + \sqrt{ख}$ सारखी राशि असल्यास तें तसेंच न ठेवण्याची गणितांत रूढि आहे. हरांतून अशा राशींचा लोप करण्याच्या पद्धतीस हराचें परिमेयकरण (rationalization) म्हणतात.

आता आपण $क + \sqrt{ख}$ सारख्या राशींसंबंधी कांही प्रमेयें सिद्ध करूं.

३.५ प्रमय १ लें—

क आणि य या परिमेय, आणि $\sqrt{ख}$ व $\sqrt{र}$ ह्या अपरिमेय राशी असून

$क + \sqrt{ख} = य + \sqrt{र}$ असेल तर $क = य$ आणि $ख = र$ असतात.

सिद्धता— $क + \sqrt{ख} = य + \sqrt{र}$

म्हणून $क - य + \sqrt{ख} = \sqrt{र}$

दोन्ही पक्षांचा वर्ग करून

$$(क - य)^२ + ख + २\sqrt{ख}(क - य) = र$$

म्हणून $२\sqrt{ख}(क - य) = र - ख - (क - य)^२$

वरील संबंधांत वाम पक्ष अपरिमेय असून दक्षिण पक्ष परिमेय

राशि आहे. पण हें शक्य नाहीं म्हणून वरील संबंधांचा प्रत्येक पक्ष शून्यासमान व्हावयास पाहिजे.

अर्थात् $_{2}$√ख (क−य)=०

√ख अपरिमेय असल्याने शून्यासमान होऊं शकत नाही. म्हणून क−य=०

अर्थात् क=य

आता क+√ख = य+√र ह्या संबंधांत, क=य

म्हणून ख=र.

३.५१ प्रमेय २ रे— क, ख, य आणि र परिमेय आणि क+√ख आणि य+√र ह्यांचा योग, त्याच प्रमाणे गुणाकार परिमेय असल्यास

√ख+√र=० आणि क=य असतात.

(क+√ख)+(य+√र) परिमेय आहे.

म्हणून √ख+√र=० व्हावयास पाहिजे

म्हणून √ख=−√र

आता (क+√ख) (य+√र) परिमेय आहे.

(क+√ख) (य+√र)

=कय+√ख√र+√ख य+√रक

पण √र=−√ख

म्हणून √र ऐवजी −√ख चा आदेश करुन

कय+√ख (−√ख)+√खय+(−√ख)क

=कय−ख+√खय−√खक. पण ही परिमेय राशि आहे.

काल्पनिक राशींची कल्पना येण्याकरितां प्रथम $य^२ + ४ = ०$ हा समीकार विचारांत घ्या.

त्यांचा वर्ग −४ येतो अशाच अहो या समीकाराचें समाधान करतील परन्तु आतापर्यंत ज्ञात असलेल्या राशी अशा आहेत की त्यांचा वर्ग सदैव धनच येतो. म्हणून जिचा वर्ग ऋण आहे अशी राशि, आपल्याला आतापर्यंत माहित असलेल्या राशींपेक्षां भिन्न प्रकारची आहे. अशा राशीस काल्पनिक राशि म्हणतात.

$\sqrt{-४} = \sqrt{४}\sqrt{-१}$ असे लिहितात.

म्हणून $\sqrt{-४} = २\sqrt{-१}$

सामान्यतः श ने $\sqrt{-१}$ चें अभिधान करतात.

म्हणून $\sqrt{-४}$ ही राशि २ श अशा प्रकारे लिहिता येईल.

$(\sqrt{-१})^२ = (\sqrt{-१})(\sqrt{-१}) = -१$ अर्थात् $श^२ = -१$

$(\sqrt{-१})^३ = (\sqrt{-१})^२ (\sqrt{-१}) = -\sqrt{-१}$ अर्थात्

$श^३ = -श$

$(\sqrt{-१})^४ = (\sqrt{-१})^२ (\sqrt{-१})^२ = १$ अर्थात् $श^४ = १$

आणि $[\sqrt{-१}]^{२स} = [(\sqrt{-१})^२]^स = (-१)^स$

स समपूर्णांक असल्यास $(\sqrt{-१})^{२स} = (-१)^स$

$= १$ अर्थात् $श^{२स} = १$

आणि स विषमपूर्णांक असल्यास $(\sqrt{-१})^{२स} = (-१)^स$

$= -१$ अर्थात् $(श)^{२स} = -१$

$(\sqrt{-१})^{२स+१} = (\sqrt{-१})^{२स} = (\sqrt{-१})$

त्याचप्रमाणे $(\sqrt{-१})^{२स+१} = (\sqrt{-१})^{२स} \; (\sqrt{-१})$
$= \pm$श स ज्या सम किंवा विषम अर्हे-
नुसार

यावरून श चा कोणताहि घात श, $-१$, $-$श आणि १ यांपैकी कोणत्यातरी एका रूपांत व्यक्त करतां येतो.

३.६२ आता, $य^२ - ३य + ३ = ०$ हा समीकार सोडवा.

$$य = \frac{३ \pm श\sqrt{३}}{२}$$

या अर्हांनी समीकाराचें समाधान होतें.

या अर्हांचें निरीक्षण केल्यास असें दिसून येईल की त्या, वास्तविक आणि काल्पनिक संख्यांचा अनुक्रमें योग आणि वियोग आहेत.

अशा प्रकारची घटना असलेल्या राशींना संकर (complex) राशी म्हणतात.

संकर राशि— क आणि ख या दोन वास्तविक राशी असल्यास क + शख हिला संकर राशि म्हणतात. ह्या राशींतील क ला वास्तविक घटक आणि ख ला काल्पनिक (imaginary) घटक म्हणतात.

सामान्यतः, कोणतीहि राशि (क + शख) ने दर्शविली जाते. हिच्यापासून, ख शून्य असल्यास क ही वास्तविक राशि मिळते, आणि क शून्य असल्यास शख ही काल्पनिक राशि मिळते, आणि क तसेच ख यांपैकी एकहि शून्य नसल्यास (क + शख) ही संकर राशि मिळते.

३.६३ अनुबद्ध संकर राशि—ज्या दोन संकर राशींतील

वास्तविक घटक समान असून काल्पनिक घटक समान पण विरुद्ध चिह्नांचे असतात त्यांना अनुबद्ध संकर राशि म्हणतात.

उदाहरणार्थ— य + शर आणि य − शर

३ + २श आणि ३ − २श

३.७ कोणत्याहि दोन संकर राशींचा योग, वियोग, गुणाकार आणि भागाकार संकर राशीच येतात.

क + शख, आणि ग + शघ ह्या दोन संकर राशी घ्या.

यांचा योग आणि वियोग

$$(\text{क}+\text{शख}) \pm (\text{ग}+\text{शघ})$$
$$= (\text{क} \pm \text{ग}) + \text{श}\,(\text{ख} \pm \text{घ}) = \text{संकर राशि.}$$

यांचा गुणाकार

$$(\text{क}+\text{शख})(\text{ग}+\text{शघ}) = (\text{कग} - \text{खघ}) + \text{श}\,[\text{कघ} + \text{खग}] = \text{संकर राशि}$$

यांचा भागाकार

$$\frac{\text{क}+\text{शख}}{\text{ग}+\text{शघ}} = \frac{(\text{क}+\text{शख})\;(\text{ग}-\text{शघ})}{(\text{ग}+\text{शघ})\;(\text{ग}-\text{शघ})}$$
$$= \frac{(\text{क}+\text{शख})\;(\text{ग}-\text{शघ})}{\text{ग}^2 - \text{श}^2\text{घ}^2}$$
$$= \frac{(\text{क}+\text{शख})\;(\text{ग}-\text{शघ})}{\text{ग}^2 + \text{घ}^2}$$
$$= \frac{(\text{कग}+\text{खघ}) + \text{श}\,(\text{खग} - \text{कघ})}{\text{ग}^2 + \text{घ}^2}$$

$$= \frac{कग + खघ}{ग^2 + घ^2} + श \, \frac{खग - कघ}{ग^2 + घ^2}$$

= संकर राशि

३.८ साध्य १—

एखादी संकर राशि शून्यासमान असल्यास तिचा वास्तविक घटक शून्य असतो, त्याचप्रमाणे काल्पनिक घटकहि शून्य असतो.

आता, क + शख ही संकर राशि शून्यासमान दिली आहे.

म्हणजेच क + शख = ०

किंवा क = − शख

दोन्ही बाजूंचा वर्ग करून आणि $श^2 = -1$ मांडून

$क^2 = -ख^2$

किंवा $क^2 + ख^2 = 0$

परंतु क आणि ख या दोन्ही वास्तविक राशी आहेत. म्हणून $क^2$ आणि $ख^2$ ह्या दोन्हीहि धन राशी आहेत.

तेव्हा, $क^2$ आणि $ख^2$ या संख्या प्रत्येकी शून्य असल्याशिवाय $क^2 + ख^2$ या शून्य होणार नाही.

म्हणून क = ० आणि ख = ०

साध्य २— दोन संकर राशी परस्परांसमान असल्यास त्यांचे वास्तविक घटक समान असतात. तसेच त्यांचे काल्पनिक घटक समान असतात.

क + शख = ग + शघ असल्यास

क = ग आणि ख = घ आहेत हें सिद्ध करणें.

क + शख = ग + शघ

म्हणून (क − ग) + श (ख − घ) = ०

साध्य १ वरून,

(क − ग) + श (ख − घ) = ०  असल्यामुळे

क − ग = ० आणि ख − घ = ०

अर्थात् क = ग आणि ख = घ.

३.८१ दोन अनुबद्ध संकर राशींचा योग त्याचप्रमाणे त्यांचा गुणाकार वास्तविक असतात.

(क + शख) आणि (क − शख) ह्या अनुबद्ध संकर राशी आहेत.

त्यांचा योग = (क + शख) + (क − शख)

= २क = वास्तविक राशि

त्यांचा गुणाकार = (क + शख) (क − शख)

= क² + ख² = वास्तविक राशि

३.८२ मापांकाची (modulus) परिभाषा– कोणत्याहि संकर राशींतील वास्तविक आणि काल्पनिक घटकांच्या वर्गयोगाच्या धन वर्गमूळास तिचा मापांक म्हणतात.

क + शख किंवा क − शख या दोघांचाहि मापांक + √(क² + ख²) आहे.

साध्य ४— दोन संकर राशींच्या गुणाकाराचा मापांक त्यांच्या मापांकाच्या गुणाकारासमान असतो.

(क + शख) आणि (ग + शघ) ह्या दोन संकर राशी आहेत.

त्यांचे $\sqrt{क^2+ख^2}$ आणि $\sqrt{ग^2+घ^2}$ हे मापांक आहेत.

आता, त्यांचा गुणाकार = (क + शख) (ग + शघ)
= (कग − खघ) + श (खग + कघ)

ह्या गुणाकाराचा मापांक

$$= \sqrt{(कग-खघ)^2 + (खग+कघ)^2}$$
$$= \sqrt{क^2ग^2+ख^2घ^2+क^2घ^2+ख^2ग^2}$$
$$= \sqrt{(क^2 + ख^2)\ (ग^2 + घ^2)}$$
$$= \sqrt{(क^2 + ख^2)}\ \sqrt{(ग^2 + घ^2)}$$

= दिलेल्या संकर राशींच्या मापांकांचा गुणाकार

३.९ एखाद्या उदाहरणाचें उत्तर अपूर्णांकाच्या रूपांत येऊन त्याच्या हरांत क + शख सारखी संकर राशि असल्यास तें तसेंच न ठेवण्याची गणितांत रूढि आहे. या विधीस हराचें परिमेयकरण म्हणतात.

उदाहरण १— $\frac{३+२श}{५+३श}$ चा हर परिमेय करा.

हराची अनुबद्ध संकर राशि ५ − ३श आहे. अंशाला आणि हराला ५ − ३श ने गुणून

$$\frac{३+२श}{५+३श}\times\frac{५-३श}{५-३श}=\frac{१५+६+श\ (१०-९)}{५^2-३^2श^2}$$

$$=\frac{२१+श}{२५+९}$$

$$= \frac{२१ + श}{३४}$$

उदाहरण २— (य + शर) चें वर्गमूळ काढा.

समजा ग + शघ हें (य + शर) चें वर्गमूळ आहे.

अर्थात् $(ग + शघ)^2 = (य + शर)$

किंवा $ग^2 - घ^2 + २ शगघ = य + शर$

वास्तविक घटकांचे तसेच काल्पनिक घटकांचे समीकरण मांडून,

$य = ग^2 - घ^2$ ............................(१)

आणि $र = २गघ$ ............................(२)

हे दोन समीकार ग आणि घ यांच्याकरिता सोडविल्यास

$$ग = \pm \left\{ \frac{\sqrt{य^2 + र^2} + य}{२} \right\}^{\frac{१}{२}}$$

$$\text{आणि } घ = \pm \left\{ \frac{\sqrt{य^2 + र^2} - य}{२} \right\}^{\frac{१}{२}}$$

ग आणि घ यांच्या या अर्हांपैकी ज्या (१) आणि (२) ह्या समीकारांचे समाधान करतात त्यांचा ग आणि घ यांच्या ठिकाणी आदेश करुन इष्ट वर्गमूळ मिळतें.

# प्रश्नसंग्रह ३

(१) सरळतम रूपांत प्रदर्शन करा.

$\sqrt{१५०}$, $\sqrt[३]{३२०}$, $\sqrt[४]{१४४}$, $\sqrt[४]{७६८}$, $\sqrt[५]{६०८}$

(२) खालील राशींचे परिमेयकारक काढा.

(१) $७+\sqrt{३}$, (२) $३+\sqrt{५}$ आणि

(३) $\sqrt{३}+\sqrt{२}$

(३) खालील राशींचे परिमेयकारक काढा.

(१) $\sqrt[३]{७}+२$, (२) $\sqrt[३]{५}+३$, आणि

(३) $\sqrt[३]{३}+\sqrt[३]{२}$

(४) खालील राशींच्या हरांचे परिमेयकरण करा आणि शक्य तेथें सरळरूपें द्या.

(१) $\frac{\sqrt{३}-१}{\sqrt{३}+१}$, (२) $\frac{१}{१+\sqrt{२}+\sqrt{३}}$,

(३) $\frac{१}{१-\sqrt{३}+\sqrt{५}}$

(५) सरळरूप द्या

$$\frac{\sqrt{५}+१}{\sqrt{५}-\sqrt{२}}+\frac{\sqrt{५}-१}{\sqrt{५}+\sqrt{२}}-\frac{२(\sqrt{५}-\sqrt{२})}{\sqrt{८९-२८\sqrt{१०}}}$$

[मद्रास

(६) खालील राशींच्या अनुबद्ध राशी काढा.

(१) ३+२श, (२) १+२श आणि (३) ७+५श

(७) गुणाकार करा.

(१) (३+२श) × (५−श)

(२) (७श−३) × (६−४श)

(८) खालील राशींच्या हरांचे परिमेयकरण करा.

(क) $\frac{१}{३+२श}$ (ख) $\frac{१}{७+८श}$ (ग) $\frac{१}{३+\sqrt{-२}}$

(घ) $\frac{(३+२श)(४-३श)}{(३-२श)(४+३श)}$.

(९) क+शख ऱ्या रूपांत व्यक्त करा.

(१) $\frac{३+४श}{१-२श}$ (२) $\frac{१+२श}{३-४श}$ ;

(३) (क+श) (३-२शख)

आणि (४) (२+२ श) (१+$\sqrt{३श}$)

(१०) य आणि र च्या ज्या अर्हांनी खालील समीकारांचे समाधान होईल त्या काढा.

(१) य+शर=२-३श

(२) २य-शर=६+५श

(३) (य+३श) (१+शर)=८-श

(४) (य+र+३श)=५+३शर

(११) खालील राशींचे वर्गमूळ काढा.

(१) -७+२४ श, (२) ५+१२श, (३) ३-४ श

(१२) जर $(क+श ख)^{-१}$ = म (क-शख) असेल तर

$क^२+ख^२=\frac{१}{म}$ आहे हें दाखवा.

(१३) जर य=कोज्या इ+श ज्या इ तर

$य^{-१}$ =कोज्या इ-श ज्या इ हें दाखवा.

# प्रकरण चवथें

## समान्तर श्रेढी

(arithmetical progression)

४. १  एखाद्या दिलेल्या नियमानुसार निर्माण झालेल्या राशी क्रमाने मांडल्यास त्या मांडणीस श्रेढी (series) म्हणतात.

आता, २, ५, ८, ११ या मांडणींतील प्रत्येक पद पूर्वीच्या पदांत ३ मिळवून निर्माण होत म्हणून या मांडणीस श्रेढी म्हटलें आहे.

त्याचप्रमाणे ५, २५, १२५, ६२५ या मांडणींतील प्रत्येक पद पूर्वीच्या पदास ५ ने गुणून निर्माण होतें म्हणून या मांडणीस श्रेढी म्हटलें आहे.

परंतु २, ७, –१०, १५, २४ ह्या मांडणींतील पदें कोणत्याहि नियमानुसार निर्माण होत नाहींत म्हणून हिला श्रेढी म्हणता येत नाही.

४. २  ज्या श्रेढींतील प्रत्येक पद पूर्वीच्या पदांत एखादी निश्चित राशि मिळवून किंवा त्यांतून उणें करून निर्माण होतें तीस समांतर श्रेढी म्हणतात.

या निश्चित राशीस समांतर श्रेढीचा प्रचय (common difference) म्हणतात.

२, ४, ६, ८,...या आणि ५, २, −१, −४...या समांतर श्रेढी असून २ आणि −३ हे त्यांचे प्रचय आहेत.

४.३ कोणत्याहि समांतर श्रेढीच्या आद्य पदाचे 'क' ने, अन्त्यपदाचें 'अ' ने, प्रचयाचे 'च' ने, पदांच्या एकंदर संख्येचें 'स' ने आणि श्रेढीयोगाचे 'यो' ने साधारणतः अभिधान केलें जाईल.

४.४ समांतर श्रेढी संबंधी कांही मूलभूत सूत्रें—

(१) आद्य पद 'क' आणि प्रचय 'च' असलेल्या समांतर श्रेढींतील कोणतेंहि पद काढतां येतें तें असें—

आद्य पद क आहे आणि प्रचय च आहे

म्हणून २रें पद क+च

,, ३रें पद क+२च

,, ४थें पद क+३च

,, १५वें पद क+१४च

,, तवें पद क+(त−१) च

यावरून, जर त व्या पदाचें अभिधान $प_त$ ने केलें तर

$प_त$ = क+(त−१) च......................(अ)

जर अंत्यपद 'अ' 'स' वें पद असल्यास,

$प_स$ = अ = क+(स−१) च.............(आ)

(२) श्रेढींतील स पदांचा योग

योगाचें अभिधान 'यो' ने करून

$$यो = क + (क + च) + (क + २च) + \ldots + (अ - च) + अ$$

हाच योग उत्क्रमानें (in the reverse order) लिहिल्यास

$$यो = अ + (अ - च) + (अ - २च) + \ldots + (क + च) + क.$$

या दोन फलांचा योग करून

$$२यो = (क + अ) + (क + अ) + \ldots \text{ स वेळा.}$$

म्हणून $२यो = स\,(क + अ)$

म्हणून $यो = \frac{स}{२}(क + अ)$ ..............................(इ)

(आ) संबंधांतील अर्हा घेतल्यास

$$यो = \frac{स}{२}[क + क + (स - १)च]$$

$$= \frac{स}{२}[२क + (स - १)च] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ई)$$

आतां (इ) आणि (ई) या संबंधा वरून असें दिसून येतें की

(१) श्रेढीतील आद्य आणि अंत्यपद आणि पदांची संख्या माहीत असल्यास किंवा

(२) श्रेढीतील आद्य पद, प्रचय आणि पदांची एकंदर संख्या माहीत असल्यास, श्रेढीयोग काढतां येतो

उदाहरण १— १०, ११$\frac{१}{२}$, १३, १४$\frac{१}{२}$....या श्रेढीच्या १४ पदांचा योग काढा.

या श्रेढीतील आद्य पद १०, पदसंख्या १४ आणि प्रचय $\frac{३}{२}$ आहे

तेव्हा (ई) चा उपयोग करून

$$\text{यो} = \frac{१४}{२}\left[२ \times १० + (१४ - १) \times \frac{३}{२}\right]$$

$$= ७\left[२० + \frac{३९}{२}\right]$$

$$= २७६\tfrac{१}{२}$$

उदाहरण २—एका समांतर श्रेढीचे आद्य पद १० आणि १८ वें पद ९५ आहे तर तिचा प्रचय आणि तिच्या २० पदांचा योग काढा.

समजा प्रचय च आहे तर (४.४ अ) वरून

१८वें पद = १० + (१८ − १) च

म्हणून ९५ = १० + १७ च

म्हणून च = ५

अतः २० पदांचा योग, (४.४ ई वरून),

$$= \frac{२०}{२}\left[२ \times १० + (२० - १) \times ५\right]$$

$$= १०[२० + ९५]$$

$$= ११५०$$

यावरून, दिलेल्या श्रेढीचा प्रचय ५ आणि योग ११५० आहे.

उदाहरण ३—(८ त − ५) हें त वें पद असलेल्या समांतर श्रेढीच्या १८ पदांचा योग काढा.

$प_त = ८ त - ५$

त ऐवजी १, २, ३.........चा आदेश करून

$प_1 = ८.१ - ५ = ३$

$प_2 = ८.२ - ५ = ११$

$प_3 = ८.३ - ५ = १९$

आता, प्रचय $= प_2 - प_1 = ११ - ३ = ८$

$\therefore यो_{१८} = \frac{१८}{२}[२ \times ३ + १७ \times ८]$

$= ९ [६ + १३६]$

$= १२७८$

## ४.५ समांतर मध्यक (mean)

क आणि ख या दोन राशींच्या मध्ये म चा निवेश करून जर क, म आणि ख समांतर श्रेढींत असतील तर 'म' ला क आणि ख यांमधील समांतर मध्यक म्हणतात.

क, म, ख ही समांतर श्रेढी असल्यामुळे

$म - क = ख - म$

म्हणून $म = \frac{क + ख}{२}$

यावरून कोणत्याहि दोन राशींच्या समांतर मध्यकाची अर्हा त्या दोन राशींच्या योगाच्या अर्धी असते.

समांतर मध्यकें

क आणि ख या कोणत्याहि दोन राशींच्या मध्ये $म_1$, $म_2$, $म_3$, ...... $म_{न}$ या राशींचा निवेश करून जर क, $म_1$, $म_2$, $म_3$......$म_{न}$, ख ही समांतर श्रेढी होत असेल तर $म_1$, $म_2$.... $म_{न}$, यांना क आणि ख यांमधील समांतर मध्यकें म्हणतात.

४.६ क आणि ख यांच्यामध्ये त समांतर मध्यकांचा निवेश करणें.

समजा की,

$म_1, म_2, म_3 \ldots\ldots म_त$ हीं इष्ट मध्यकें आहेत. तेव्हा मध्यकांच्या परिभाषेनुसार,

$क, म_1, म_2, म_3 \ldots\ldots म_त$, ख ही (त + २) पदांची समांतर श्रेढी आहे. यांतील आद्य पद क आणि अंत्य पद ख आहे. च हा प्रचय घेतल्यास (४.४ आ) वरून,

$$ख = क + (त+१) च$$

$$\text{अथवा } च = \frac{ख - क}{त+१}$$

म्हणून $म_1$ = दुसरें पद.

$$= क + \frac{ख - क}{त+१}$$

$म_2$ = तिसरें पद.

$$= क + २ \frac{(ख - क)}{त+१}$$

.....................

.....................

$म_त$ = (त + १) वे पद.

$$\text{म्हणून } = क + त\frac{(ख - क)}{त+१}$$

तेव्हा $म_1, म_2 \ldots म_त$ च्या क्रमशः

$$क+\frac{ख-क}{त+१},\ क+२\frac{ख-क}{त+१},\ \ldots\ क+त\frac{(ख-क)}{त+१}$$

ह्या अर्हा आहेत.

उदाहरण— $५\frac{१}{२}$ आणि १९ यांमध्ये ८ समान्तर मध्यकांचा निवेश करा.

समजा की,

$म_१, म_२, म_३ \ldots म_८$, ही इष्ट मध्यकें आहेत.

म्हणून $५\frac{१}{२}$, $म_१$, $म_२ \ldots म_८$, १९ ही १० पदांची समान्तर श्रेढी आहे. त्यांतील आद्य पद $५\frac{१}{२}$ आणि अंत्य पद १९ आहे. प्रचय च घेतल्यास

$$१९ = \frac{११}{२} + ९\,च$$

म्हणून $$च = \frac{३}{२}$$

यावरून $५\frac{१}{२}$ आणि १९ यांमध्ये ७, $८\frac{१}{२}$........$१७\frac{१}{२}$ ही इष्ट समान्तर मध्यकें आहेत

४.७ समान्तर श्रेढीचें आद्य पद, प्रचय आणि योग दिलेला असल्यास पदसंख्या काढणें.

आद्य पद क, प्रचय च, योग यो आणि पदसंख्या स यामध्ये आपण (४.४३) मध्ये जो संबंध प्रस्थापित केला आहे त्यांतच क, च आणि यो च्या दिलेल्या अर्हांचा आदेश करून स ची अर्हा निश्चित होते.

म्हणून

$$यो = \frac{स}{२}\,[२क+(स-१)\,च]$$

$२यो = २सक + (स^२ - स) च$

म्हणून $चस^२ + (२क - च) स - २यो = ०$

हा स चा वर्गसमीकार असल्यामुळे आपणांला सामान्यतः स च्या दोन अर्हा मिळतात.

आता, स न पदसंख्येचें अभिधान होत असल्यामुळे तो अवश्य धनपूर्णांक असावयास पाहिजे. म्हणून आपणाला स च्या वरील अर्हांपैकी केवळ धनपूर्णांक अर्हाच घेतली पाहिजे. ऋण किंवा भिन्न अर्हा-तिला कोणताच अर्थ नसल्यामुळे त्याज्य मानली पाहिजे.

उदाहरण १— ५१, ४८, ४५ ......ह्या श्रेढीचा योग ३९६ आहे. तर पदांची संख्या काढा.

समजा स पदसंख्या आहे.

$प्रचय = ४८ - ५१ = -३$

म्हणून $३९६ = \frac{स}{२} [२ \times ५१ + (स - १)(-३)]$

$= \frac{स}{२} [१०२ - ३स + ३]$

म्हणून $३स^२ - १०५स + ७९२ = ०$

किंवा $स^२ - ३५स + २६४ = ०$

म्हणून स = ११ तसेच स = २४

म्हणून दिलेली श्रेढी ११ किंवा २४ पदांची आहे.

उदाहरण २— १, ४, ७......या श्रेढीच्या किती पदांचा योग २८७ होईल ?

समजा स ही इष्ट पदसंख्या आहे.

येथे क=१, यो=२८७ आहे.

आता प्रचय $=४-१=३$

तेव्हा $२८७=\frac{स}{२}[२\times१+(स-१)३]$

$५७४=२स+३स^{२}-३स$

म्हणून $३स^{२}-स-५७४=०$

म्हणून $स=१४$ तसेच $स=-\frac{४१}{३}$

स ची $-\frac{४१}{३}$ ही ऋण किंवा भिन्न अहीं त्याज्य असल्यामुळे इष्ट पदसंख्या १४ आहे.

४.८ समांतर श्रेढीचे कांही महत्वाचे गुणधर्म—

(१) समांतर श्रेढीच्या प्रत्येक पदांत एखादी संख्या मिळविली किंवा प्रत्यक पदांतून एखादी संख्या उणें केली तर निर्माण होणारी नवी श्रेढीहि समांतर श्रेढी असते, आणि तिचा प्रचय दिलेल्या श्रेढाच्या प्रचयाएवढाच असतो.

समजा,

क, क+च, क+२च, क+३च......ही एक समांतर श्रेढी आहे.

तिच्या प्रत्येक पदांत ख मिळविल्यास (क+ख), (क+च +ख), (क+२च+ख), ...... ही नवीन श्रेढीहि समान्तर श्रेढीच आहे हें उघड आहे. तिचा प्रचय

$= (क+२च+ख) - (क+च+ख)$

$= (क+च+ख) - (क+ख)$

$= च$

यावरून वरील विधानाची सत्यता सिद्ध होते.

(२) समांतर श्रेढींतील प्रत्येक पदाला एखाद्या अचल संख्येने गुणून येणारीं पदें समांतर श्रेढींत असतात. आणि ह्याच गुणकाने दिलेल्या श्रेढीच्या प्रचयास गुणून येणारी संख्या नवीन श्रेढीचा प्रचय असते.

समजा,

क, क+च, क+२च......ही एक दिलेली समांतर श्रेढी आहे.

तिच्या प्रत्येक पदाला ख ने गुणल्यास क+ख, (क+च)ख, (क+२च) ख,.........ही नवीन श्रेढीहि समांतर श्रेढीच आहे हें उघड आहे.

तिचा प्रचय $= (क+च)\,ख - कख$

$= चख$

यावरून वरील विधानाची सत्यता सिद्ध होते.

४.९ उदाहरण १—

एका समांतर श्रेढीच्या लागोपाठच्या तीन पदांचा गुणाकार १०५ असून त्यांचा योग १५ आहे, तर तीं पदें काढा.

समजा की, क $-$ च, क, क $+$ च हे तीन पद समांतर श्रेढीत आहेत.

यांचे गुणनफल १०५ आहे

$\therefore$ क (क$^{२}$ $-$ च$^{२}$) $=$ १०५................(१)

यांचा योग १५ आहे

$\therefore$ क $-$ च $+$ क $+$ क $+$ च $=$ १५

$\therefore$ ३क $=$ १५

किंवा क $=$ ५..............................(२)

(१) मध्यें क $=$ ५ ठेवून

५(२५ $-$ च$^{२}$) $=$ १०५

२५ $-$ च$^{२}$ $=$ २१

च$^{२}$ $=$ ४

च $=$ $\pm$२

म्हणून च $=$ २ घेतल्यास तीं पदें ३, ५, ७ आहेत आणि च $=$ $-$२ घेतल्यास तीं पदें ७, ५, ३ आहेत.

उदाहरण २— क, ख, आणि ग समांतर श्रेढींत असल्यास

(१) $\frac{१}{खग}$, $\frac{१}{गक}$, $\frac{१}{कख}$

(२) ख $+$ ग, ग $+$ क, क $+$ ख ह्या दोन समांतर श्रेढी आहेत हें दाखवा.

(१) क, ख, ग हीं समांतर श्रेढींतील पदें आहेत,

त्यांना $\frac{१}{कखग}$ ने गुणा.

$\frac{क}{कखग}, \frac{ख}{कखग}, \frac{ग}{कखग}$ हीं पदें सुद्धा समान्तर श्रेढींत आहेत

[अनुच्छेद ४.८ — (२)]

म्हणून $\frac{१}{खग}, \frac{१}{कग}, \frac{१}{कख}$ समांतर श्रेढींत आहेत

(२) जर ख+ग, ग+क, आणि क+ख समांतर श्रेढींत असतील तर

$$(ग+ख)-(ख+ग)=(क+ख)-(ग+क)$$

असावयास पाहिजे.

म्हणजेच क−ख=ख−ग

हा प्रतिबंध, क, ख, ग हीं पदें समान्तर श्रेढींत असल्यामुळें क, ख, ग कडून पाळला जातो.

म्हणून ख+ग, ग+क, क+ख हीं पदें समांतर श्रेढींत आहेत.

## प्रश्नसंग्रह ४

(१) खालील श्रेढींचें स वें पद लिहा.

(अ) ९, $८\frac{१}{३}$, $७\frac{२}{३}$, ......

(आ) २, ९, १६, ......

(इ) ४, १३, २२, ......

(ई) $\frac{१}{क}$, $\frac{२}{क}$, $\frac{३}{क}$, ........

(उ) $\frac{१}{स}$, $\frac{स+१}{स}$, $\frac{२स+१}{स}$, ...

(२) खालील श्रेढींचें योग काढा.

(अ) ३, $७\frac{१}{४}$, $११\frac{१}{२}$, ......२० पदापर्यंत

(आ) ७५, ७२, ६९, ......१६ पदापर्यंत

(इ) $\frac{२}{३}$, $\frac{५}{६}$, १, ...... ३० पदापर्यंत

(ई) ४, $\frac{१३}{४}$, $\frac{५}{२}$, ............ १० पदापर्यंत

(उ) २·३५, ३·७, ५·०५,...... २१ पदापर्यंत

(ऊ) $\frac{३}{\sqrt{५}}$, $\sqrt{५}$, $\frac{७}{\sqrt{५}}$ ......२५ पदापर्यंत

(ए) (३क − ५ख), (४क − ७ख), (५क − ९ख),...... ...स पदापर्यंत

(ऐ) १, ३, ५, ७,............स पदापर्यंत

निवेश कराः—

(३) (अ) $१\frac{२}{३}$ आणि $६\frac{२}{३}$ यांच्या मध्ये ११ मध्यकांच

(आ) २ आणि ५७ यांच्या मध्ये १० मध्यकांचा.

(इ) १ आणि ४१ यांच्या मध्ये ७ मध्यकांचा.

(ई) $स^२$ आणि १ यांच्या मध्ये स मध्यकांचा.

(उ) क आणि ख यांच्या मध्ये (२स+१) मध्यकांचा.

(उ) मध्ये मध्यपदाची अर्हा काढा.

(४) एखाद्या समांतर श्रेढीच्या प्रत्येकीं दोन दोन अनुगामी पदांमध्ये मध्यकांच्या समान संख्यांचा निवेश केल्यास निष्पन्न होणारा श्रेढी समांतर श्रेढाच असते हें दाखवा.

(५) एका समांतर श्रेढीचें १०वें पद १२ आणि २०वें पद १७ आहे तर तिच्या १५ पदांचा योग काढा.

(६) एका समांतर श्रेढीचें १०वें पद २५ आणि २५वें पद ५५ आहे तर ५०वें पद आणि ५० पदांचा योग काढा.

(७) एखाद्या समांतर श्रेढीचें स वें पद $\frac{१}{६}(१० - ७स)$ असल्यास तिच्या स पदांचा योग $\frac{स}{१२}(१३ - ७स)$ येईल हें दाखवा.

(८) समांतर श्रेढींत असलेल्या तीन संख्यांचा योग ५१ आणि पहिल्या व तिसऱ्या संख्यांचा गुणाकार २७३ आहे तर त्या संख्या कोणत्या ?

(९) समांतर श्रेढींत असणाऱ्या पांच संख्यांचा योग २५ असून पहिल्या आणि पांचव्या पदांचा गुणाकार १६ आहे तर त्या संख्या कोणत्या?

[नागपुर १९२९

(१०) सहा पदें असलेल्या कोणत्याहि समांतर श्रेढीच्या पहिल्या आणि शेवटच्या पदांचा योग तिसऱ्या आणि चवथ्या पदांच्या योगासमान असतो हें दाखवा.

(११) एका समांतर श्रेढीचें स वें पद $(\frac{स}{६}-\frac{१}{६})$ आहे तर तिच्या १२५ पदांचा योग काढा.

(१२) एका समांतर श्रेढीचें त वें पद $\frac{१}{३}$ (त + ५) आहे तर १६ पदांचा योग काढा.

(१३) ५ + ७ + ९ + ...... ह्या श्रेढीच्या किती पदांचा योग ४८० होईल?

(१४) ३ पासून आरंभ करून, किती विषम संख्या घेतल्या म्हणजे त्यांचा योग २८८ होईल?

(१५) ५, ८, ११...... या समांतर श्रेढीच्या पदांचा योग १०२५ आहे तर पदांची एकंदर संख्या काढा.

(१६) एका समांतर श्रेढीचें पहिलें पद ७२ आणि प्रचय ५ आहे तर तिचा योग १४६३ येण्याकरितां किती पदें घ्यावीं लागतील?

(१७) एक समांतर श्रेढीचें आद्यपद ४ आणि अंत्य पद १०९ आहे. तिच्या स पदांचा योग २०३४ असल्यास स

ची अर्हा काढा.

(१८) एक मनुष्य आपल्या मित्राला १००० रूपये उधार देतो, परंतु त्यावर व्याज न आकारतां प्रत्येक महिन्यास उत्तरोत्तर २ रू० ने कमी होणारी रकम घेतो. पहिला हप्ता ६४ रूपयांचा असेल तर उधारीची फेड किती महिन्यांत होईल ?

(१९). एका सरळ रस्त्यावर पांच पांच यष्टि अंतरावर एक असे १०० दगड आहेत. पहिल्या दगडामागे पांच यष्टि अंतरावर एक करंडा ठेवली असून तेथून एक मुलगा पळण्यास प्रारंभ करतो. व प्रत्येक वेळी एक एक याप्रमाणे सर्व दगड त्या करंडींत आणून टाकतो तर तो एकदर किती यष्टि धावेल ?

(२०) ४, १२, २०, २८...... या श्रेढीच्या स पदांचा योग एखाद्या सम संख्येचा वर्ग आहे हें दाखवा.

(२१) एखाद्या समान्तर श्रेढीच्या (स+१) व्या पदापासून (२स) व्या पदापर्यंतच्या पदांचा योग त्याच्या ३स पदांच्या योगाच्या $\frac{१}{३}$ आहे, हें सिद्ध करा.

(२२) १, ३, ५, ७...... या श्रेढींतील पदांची संख्या सम असल्यास पूर्वार्ध पदांच्या योगाची, उत्तरार्ध पदांच्या योगाशीं निष्पत्ति स्थिर असते हें दाखवा.

(२३) जर एखाद्या समांतर श्रेढींत

$$यो_{म} = \frac{१}{२} यो_{म+स} = \frac{१}{२} यो_{म+त} ;$$

तर स × त = म (म + स + त) आहे हे सिद्ध करा.

[मद्रास १९००

(२४) दोन समांतर श्रेढींच्या स व्या पदांच्या योगांची निष्पत्ति $\frac{३ स + १}{४ स - ६}$ असेल तर त्यांच्या १५ व्या पदांची निष्पत्ति काढा.

(२५) दोन समांतर श्रेढींच्या स पदांच्या योगाची निष्पत्ति (३ स + २१): (५ स − ३) आहे तर त्यांची ९ वीं पदें समान आहेत हें दाखवा.

(२६) प्राकृतिक संख्यांचे खालील प्रकारें समूह तयार केले—

१, (२+३), (४+५+६), (७+८+९+१०),......

तर स व्या समूहांतील पदांचा योग $\frac{१}{२}$स(स² + १) आहे हें दाखवा.

[कलकत्ता

(२७) विषम संख्येचे खालील प्रकारें समूह पाडले—

(१+३), (५+७+९+११), (१३+१५+१७+१९+२१+२३),......

तर स व्या समूहांतील पदांचा योग ४स³ आहे हें सिद्ध करा.

यावरून, पहिल्या स प्राकृतिक संख्यांच्या घनांचा योग त्यांच्या योगाच्या वर्गासमान असतो हें सिद्ध करा.

(२८) एका श्रेढीच्या स पदांचा योग कस + ख असून त्यांत क आणि ख अचल आहेत तर ती समांतर श्रेढी

आहे हें दाखवा. [नागपूर १९३१

(२९) एका समांतर श्रेढीच्या स पदांचा योग कस² आहे तर ती श्रेढी काढा.

(३०) एका समांतर श्रेढीचें त वें पद क आणि थ वें पद ख आहे तर (त+थ) पदांचा योग

$$\frac{त+थ}{२}\left[क+ख+\frac{क-ख}{त-थ}\right]$$ आहे हें दाखवा.

(३१) एका समांतर श्रेढीच्या त पदांचा योग थ आणि थ पदांचा योग त आहे तर तिच्या (त+थ) पदांचा योग काढा.

(३२) एका समांतर श्रेढीच्या त आणि थ पदांचा योग समान आहे तर (त+थ) पदांचा योग शून्य आहे हें दाखवा.

(३३) एका समांतर श्रेढीचें त वें, थ वें आणि द वें पद क्रमशः ट, ठ आणि ड आहे तर

ट (थ − द) + ठ (द − त) + ड (त − थ) = ० हें दाखवा.

(३४) एका समांतर श्रेढीच्या त, थ, आणि द पदांचा योग क्रमशः ट, ठ आणि ड आहे तर

$ट\,\frac{थ-द}{त} + ठ\,\frac{द-त}{थ} + ड\,\frac{त-थ}{द} = ०$ हें दाखवा.

(३५) $\frac{१}{ख+ग}$, $\frac{१}{ग+क}$ आणि $\frac{१}{क+ख}$ या तीन राशी समांतर श्रेढींत असतील तर $क^२$, $ख^२$ आणि $ग^२$ याहि तीन राशी समांतर श्रेढींत आहेत हें दाखवा.

(३६) जर $(ख-ग)^{२}$, $(ग-क)^{२}$, $(क-ख)^{२}$, या तीन राशी समांतर श्रेढींत असतील तर

$\frac{१}{ख-ग}$, $\frac{१}{ग-क}$ आणि $\frac{१}{क-ख}$ याहि समांतर श्रेढींत आहेत हें दाखवा.

(३७) जर $क^{\frac{१}{य}} = ख^{\frac{१}{र}} = ग^{\frac{१}{ल}}$ आणि $ख^{२} = कग$ तर सिद्ध करा की य, र आणि ल समांतर श्रेढींत आहेत.

# प्रकरण पांचवें

## गुणोत्तर श्रेढी

(geometrical progression)

५.१ ज्या श्रेढींतील कोणत्याहि पदाची त्याच्या पूर्वगामी पदाशीं असलेली निष्पत्ति सदा तीच असते तिला गुणोत्तर श्रेढी म्हणतात, आणि या निष्पत्तीला साधारण निष्पत्ति (common ratio) म्हणतात.

१, २, ४, ८, १६, ३२,......;

$\frac{१}{३}, \frac{१}{९}, \frac{१}{२७}, \frac{१}{८१}, ......;$

आणि क, कन, कन$^{२}$, कन$^{३}$............ हीं गुणोत्तर श्रेढींचीं उदाहरणें आहेत.

या श्रेढींतील कोणत्याहि दोन लागोपाठच्या पदांची निष्पत्ति क्रमशः २, $\frac{१}{३}$, आणि न आहे. म्हणून त्यांना गुणोत्तर श्रेढी म्हटलें आहे.

साधारण निष्पत्ति— साधारण निष्पत्तीचा दुसरीहि परिभाषा देतां येते ती अशी— गुणोत्तर श्रेढींतील पदांच्या अर्हा ज्या साधारण अवयवाने वाढतात किंवा कमी होतात त्या अवयवास साधारण निष्पत्ति म्हणतात. ही निष्पत्ति कोणत्याहि पदाला त्याच्या पूर्वगामी पदाने भागून काढतां येते.

५.१२ गुणोत्तर श्रेढीचें कोणतेंहि पद काढणें

गुणोत्तर श्रेढीचें आद्य पद 'क' आणि साधारण निष्पत्ति 'न' आहे असें समजा.

आद्य पदाला न नें गुणून दुसरें पद प्राप्त होतें.

यावरून १लें पद क;

म्हणून दुसरें पद कन

तिसरें पद $कन^{२}$

चवथें पद $कन^{३}$

तेरावें पद $कन^{१२}$

आणि त वें पद $कन^{त-१}$

जर तव्या पदाचें $प_{त}$ नें अभिधान केलें तर

$$प_{त} = कन^{त-१}$$

यावरून असा निष्कर्ष निघतो की गुणोत्तर श्रेढीच्या कोणत्याहि पदांतील न चा घात त्या पदाच्या क्रमांकापेक्षा एक ने कमी असतो.

५.१३ गुणोत्तर श्रेढीची कोणतीहि दोन पदें माहीत असल्यास संपूर्ण श्रेढी पूर्णपणें निश्चित होते.

समजा, त वें आणि थ वें पद अ आणि आ हीं आहेत, आणि आद्य पद क असून साधारण निष्पत्ति न आहे.

आता, $प_त = कन^{त-१}$ परंतु $प_त = अ$

म्हणून $कन^{त-१} = अ$ ..............................(१)

त्याचप्रमाणे

$प_थ = कन^{थ-१}$

परंतु $प_थ = आ$

म्हणून $कन^{थ-१} = आ$ ..............................(२)

(१) ला (२) नें भागून

$$\frac{कन^{त-१}}{कन^{थ-१}} = \frac{अ}{आ}$$

म्हणून $न^{त-थ} = \frac{अ}{आ}$

म्हणून $न = \left[\frac{अ}{आ}\right]^{\frac{१}{त-थ}}$ ..............................(३)

(१) मध्ये न च्या अर्हेचा आदेश करून

$$क \left[\frac{अ}{आ}\right]^{\frac{त-१}{त-थ}} = अ$$

म्हणून $क = अ\left[\frac{आ}{अ}\right]^{\frac{त-१}{त-थ}}$ ..............................(४)

(३) आणि (४) वरून आद्य पद 'क' आणि साधारण निष्पत्ति 'न' ही काढतां येत असल्यामुळे संपूर्ण श्रेढी निश्चित होते.

उदाहरण—

ज्या गुणोत्तर श्रेढींत ४थें आणि ७वें हीं पदें क्रमशः ४० आणि ३२० आहेत तिचें १लें आणि ५वें पद काढा.

श्रेढीचें आद्य पद क आणि साधारण निष्पत्ति न् आहे असें समजा.

तेव्हा $प_४ = कन^३ = ४०$..............................(१)

आणि $प_७ = कन^६ = ३२०$..............................(२)

म्हणून $\frac{प_७}{प_४} = \frac{कन^६}{कन^३} = \frac{३२०}{४०}$

किंवा $न^३ = २^३$

किंवा $न = २$

पुन्हा $प_४ = कन^३$

$= ४०$

पण $न = २$

म्हणून $८ क = ४०$

किंवा $क = ५$

आता $प_५ = कन^४ = ५ \times २^४$

$= ८०$

५.२ गुणोत्तर मध्यक—

(१) कोणत्याहि दोन राशींमधील गुणोत्तर मध्यकाची परिभाषा.

जर क, म आणि ख या तीन राशी गुणोत्तर

श्रेढीत असतील तर म ला क आणि ख यांमधील गुणोत्तर मध्यक म्हणतात.

अथवा

क आणि ख या दोन राशींच्या मध्ये म चा निवेश करून जर क, म, ख ही गुणोत्तर श्रेढी होत असेल तर 'म' ला क आणि ख यांमधील गुणोत्तर मध्यक म्हणतात.

आता, क, म, ख ही गुणोत्तर श्रेढी आहे.

म्हणून $\frac{क}{म} = \frac{म}{ख}$

किंवा $म^2 = कख$

किंवा $म = \pm \sqrt{कख}$

यावरून, कोणत्याहि दोन राशींमधील गुणोत्तर मध्यक त्यांच्या गुणाकाराच्या वर्गमूळाएवढें असतें.

(२) गुणोत्तर मध्यकें

कोणत्याहि दोन राशींमधील अनेक गुणोत्तर मध्यकांची परिभाषा

क आणि ख या कोणत्याहि दोन राशींच्या मध्ये $म_1$, $म_2$, $म_3$, ..., $म^{न}$ या राशींचा निवेश करून जर क, $म_1$, $म_2$, $म_3$,...$म^{न}$, ख ही गुणोत्तर श्रेढी होत असेल तर $म_1$, $म_2$, $म_3$...$म_{न}$ यांना क आणि ख यांमधील गुणोत्तर मध्यकें म्हणतात.

५.२१ दिलेल्या दोन राशींच्या मध्ये दिलेल्या संख्ये

इतक्या मध्यकांचा निवेश करणें.

क आणि ख या दोन दिलेल्या राशी असून त्यांच्यामध्यें त मध्यकांचा निवेश करावयाचा आहे.

समजा $म_१$, $म_२$ ...$म_त$ हीं त मध्यकें आणि न ही साधारण निष्पत्ति आहे. तर क, $म_१$, $म_२$, ...$म_त$, ख ही (त+२) पदांची गुणोत्तर श्रेढी तयार होते.

ख हें (त+२) वें पद आहे

म्हणून $ख = क \times न^{त+१}$

किंवा $न^{त+१} = \frac{ख}{क}$

$$\therefore न = \left[\frac{ख}{क}\right]^{\frac{१}{त+१}}$$

म्हणून $म_१$ = दुसरें पद

$= क \times न$

$$= क\left[\frac{ख}{क}\right]^{\frac{१}{त+१}}$$

$म_२$ = तिसरें पद

$= कन^२$

$$= क\left[\frac{ख}{क}\right]^{\frac{२}{त+१}}$$

.............................

ह्याप्रमाणे $म_त$ = (त+१) वें पद

$= क \times न^{त}$

$= क \left[\frac{ख}{क}\right]^{\frac{त}{+१}}$

म्हणून $म_{१}, म_{२}, \ldots\ldots म_{त}$ हीं मध्यकें

क्रमशः $क \left(\frac{ख}{क}\right)^{\frac{१}{त+१}}, क \left(\frac{ख}{क}\right)^{\frac{२}{त+१}}, \ldots\ldots क \left(\frac{ख}{क}\right)^{\frac{त}{त+१}}$

आहेत.

उदाहरण— ३ आणि $\frac{३}{२५६}$ यांच्यामध्ये ७ गुणोत्तर मध्यकांचा निवेश करा.

समजा की $म_{१}, म_{२}, \ldots\ldots म_{७}$ हीं मध्यकें असून न ही साधारण निष्पत्ति आहे.

आता, अर्थात एकंदर ९ पदें असून $\frac{३}{२५६}$ हें ९ वें पद

आणि ३ हें पहिलें पद आहे.

म्हणून $\frac{३}{२५६} = ३ \times न^{८}$

किंवा $न^{८} = \frac{१}{२५६}$

$= \frac{१}{२^{८}}$

म्हणून $न = \pm \frac{१}{२}$

यावरून $न = + \frac{१}{२}$ घेतल्यास

$म_१$ = दुसरें पद

$= ३ \times \frac{१}{२}$

$= \frac{३}{२}$

$म_२$ = तिसरें पद

$= ३\left[\frac{१}{२}\right]^२$

$= \frac{३}{४}$

..........................

$म_७$ = ८ वें पद

$= ३\left[\frac{१}{२}\right]^७$

$= \frac{३}{१२८}$

तेव्हा $\frac{३}{२}, \frac{३}{४}, \ldots \frac{३}{१२८}$ हीं ७ मध्यकें आहेत.

आता $न = -\frac{१}{२}$ घेतल्यास

$-\frac{३}{२}, \frac{३}{४}, \ldots\ldots -\frac{३}{१२८}$ हीं ७ मध्यकें आहेत.

५.३ क हें पहिलें पद, आणि न ही साधारण निष्पत्ति असलेल्या गुणोत्तर श्रेढीच्या स पदांचा योग काढणें.

क, कन, $कन^२, \ldots कन^{स-१}$ दिलेली गुणोत्तर श्रेढी आहे असें समजा. तिच्या इष्ट योगाचें यो नें अभिधान केल्यास

$$यो = क + कन + कन^२ \ldots\ldots + कन^{स-१} \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

दोन्ही पक्षांना 'न' या साधारण निष्पत्तीनें गुणून

$$यो \times न = कन + कन^२ + \ldots\ldots + कन^{स-१} + कन^स \ldots (२)$$

(१) मधून (२) उणें करून

$$यो\ (१ - न) = क\ (१ - न^स)$$

$$म्हणून\ यो = \frac{क\ (१ - न^स)}{१ - न} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

उदाहरण १— $\sqrt{३}$, १, $\frac{१}{\sqrt{३}}, \frac{१}{३}$ ......... या श्रेढीच्या १८ पदांचा योग काढा.

दिलेल्या श्रेढींतील पहिलें पद $\sqrt{३}$, निष्पत्ति $\sqrt{\frac{१}{३}}$ आणि पदसंख्या १८ आहे.

(५.३) मधील (३) संबंधांत क, न आणि स यांच्या अर्हांचा आदेश करून

$$यो = \frac{\sqrt{३}\,[१ - (\sqrt{\tfrac{१}{३}})^{१८}]}{१ - \frac{१}{\sqrt{३}}}$$

$$= \frac{३\,(१ - \frac{१}{३^{९}})}{\sqrt{३} - १}$$

$$= \frac{(३^{९} - १)}{३^{८}\,(\sqrt{३} - १)}$$

$$= \frac{१९६८३ - १}{३^{८}\,(\sqrt{३} - १)}$$

$$= \frac{१९६८२}{६५६१\,(\sqrt{३} - १)}$$

हराला परिमेय करून

$$यो = \frac{१९६८२}{६५६१\,(\sqrt{३} - १)} \cdot \frac{(\sqrt{३} + १)}{(\sqrt{३} + १)}$$

$$= \frac{९८४१}{६५६१}\,(\sqrt{३} + १)$$

उदाहरण २— १, २, ४,......या श्रेढीच्या पदांचा योग २५५ असल्यास त्यांची संख्या काढा.

समजा पदसंख्या स आहे.

साधारण निष्पत्ति सा = $\frac{२}{१}$ = २

पहिलें पद १ आणि योग २५५ आहे. म्हणून (५.३) मधील (इ) संबंधावरून

$$२५५ = \frac{२^{स} - १}{२ - १}$$

म्हणून $१ - २^{स} = -२५५$

किंवा $२^{स} = २५६$

$= २^{८}$

म्हणून स = ८

यावरून इष्ट पदसंख्या ८ आहे.

## प्रश्नसंग्रह ५

(१) काढा—

(१) १, −२, ४, −८,....... या श्रेढीचें १० वें पद

(२) ३०, १५, ७½, ......... या श्रेढीचें ७ वें पद

(३) $\frac{१}{५}$, $-\frac{२}{१५}$, $\frac{४}{४५}$,...... या श्रेढीचें ८ वें पद

(४) $\frac{१}{३}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{४}{३}$,............ या श्रेढीचें स वें पद

(२) खालील श्रेढींचे योग काढा.

(१) २+४+८+......१० पदापर्यंत

(२) $१ - \frac{२}{३} + \frac{४}{९} + \ldots \ldots$ ६ पदापर्यंत

(३) $२ + \sqrt{२} + १ + \frac{१}{\sqrt{२}} + \ldots\ldots$ १२ पदापर्यंत

(४) $\frac{२}{३} - \frac{१}{२} + \frac{३}{४} - \ldots\ldots$ स पदापर्यंत

(५) $\frac{क}{य}\frac{\sqrt{५}}{\sqrt{३}} + \frac{\sqrt{क}}{\sqrt{य}} + \frac{\sqrt{३}}{\sqrt{५}} + \ldots\ldots$ स पदापर्यंत

(६) $क^{ट} + क^{ट+ठ} + क^{ट+२ठ} + \ldots\ldots$ स पदापर्यंत

(३) एका गुणोत्तर श्रेढींतील तीन अनुगामी पदांचा गुणाकार २१६ आणि त्यांतील प्रत्येकीं दोन पदें घेऊन येणाऱ्या गुणाकारांचा योग १२६ आहे तर तीं पदें काढा.

(४) एका गुणोत्तर श्रेढींतील तीन अनुगामी पदांचा योग २४$\frac{१}{५}$ असून त्यांचा गुणाकार ६४ आहे. तर ती पदें काढा.

(५) एखाद्या गुणोत्तर श्रेढींत ६ पदें असल्यास आद्य आणि अंत्य पदांचा गुणाकार, दुसऱ्या आणि चवथ्या पदांच्या गुणाकारा समान असतो हें दाखवा.

(६) एका श्रेढीच्या स पदांचा योग य, गुणाकार र आणि पदांच्या व्युत्क्रमांचा (reciprocals) योग ल असेल

तर $र^{२} = \left(\frac{य}{ल}\right)$ आहे हें दाखवा. [नागपुर

(७) एका गुणोत्तर श्रेढीचें क हें आद्य पद, अ हें स वें पद

आणि पहिल्या स पदांचा गुणाकार ग असल्यास

$$ग = (क \times अ)^{\frac{स}{२}}$$

[कलकत्ता १९१८

(८) एका गुणोत्तर श्रेढीच्या स पदांचा योग ७२८, साधारण निष्पत्ति ३ आणि आद्य पद २ आहे तर स ची अर्हा काढा.

(९) एका गुणोत्तर श्रेढीची साधारण निष्पत्ति ३ असून पहिल्या व तिसऱ्या पदांचा योग पहिल्या आणि दुसऱ्या पदांच्या वर्गाच्या योगासमान आहे. तर तिच्या स पदांचा योग काढा. जर स=६ असेल तर योग ३६४ आहे हें दाखवा.

(१०) खालील राशींमध्ये निर्देशिलेल्या गुणोत्तर मध्यकांचा निवश करा.

(१) $\frac{१}{२७}$ आणि ९ यामध्ये ४ मध्यकें

(२) २ आणि ४८६ यांमध्ये ४ मध्यकें

(३) $\frac{३२}{८१}$ आणि $\frac{९}{२}$ यांमध्ये ५ मध्यकें

(४) २७ आणि $\frac{१}{२७}$ मध्ये ५ मध्यकें

(११) जिचें १० वें पद १ आणि पहिलें पद २ आहे अशा गुणोत्तर श्रेढीची साधारण निष्पत्ति काढा.

(१२) दोन संख्यांचा योग त्यांमधील गुणोत्तर मध्यकापेक्षा

९ ने अधिक असून त्यांच्या योगाचा वर्ग त्यांच्या गुणाकारापेक्षा १८९ ने अधिक आहे तर त्या संख्या कोणत्या ?

(१३) क आणि ख यांच्या मध्ये स गुणोत्तर मध्यकांचा निवेश केल्यास, त्या मध्यकांचा गुणाकार $(\text{कख})^{\frac{\text{स}}{२}}$ असतो हें दाखवा.

(१४) एका गुणोत्तर श्रेढींतील पदांची संख्या सम आहे तर आद्य आणि अंत्य पदांपासून समान अंतरावर असणाऱ्या पदांचा गुणाकार मध्यल्या दोन पदांच्या गुणाकारासमान असतो हें दाखवा.

(१५) एका गुणोत्तर श्रेढींतील पहिल्या स, २स आणि ३ स पदांचा योग क्रमशः $\text{यो}_१$, $\text{यो}_२$ आणि $\text{यो}_३$ असल्यास $\text{यो}_१ (\text{यो}_२ - \text{यो}_३) = (\text{यो}_२ - \text{यो}_१)^२$ आहे हें सिद्ध करा.

(१६) जर $\text{यो}_१, \text{यो}_२ \ldots\ldots \text{यो}_\text{स}$ एखाद्या गुणोत्तर श्रेढींतील क्रमशः १, २, ३...... स पदांच्या योगांचें अभिधान करीत असतील तर $(\text{यो}_१ + \text{यो}_२ + \text{यो}_३ + \ldots\ldots\ldots \text{यो}_\text{स})$ ची अर्हा काढा.

(१७) जर क : ख $= २ + \sqrt{३} : २ - \sqrt{३}$ असेल, तर क आणि ख यांमधील समांतर मध्यक त्यांच्या गुणोत्तर मध्यकाच्या दुप्पट असतें हें दाखवा.

(१८) क आणि ख यांच्यांमधील समांतर मध्यक आणि गुणोत्तर मध्यक यांची निष्पत्ति मः न आहे. तर

$\frac{क}{ख}=\frac{म+\sqrt{म^2-न^2}}{म-\sqrt{म^2-न^2}}$ आहे हें दाखवा.

(१९) जर $क+ख+ग$, $\sqrt{क^2+ख^2+ग^2}$ आणि $क-ख+ग$ या तीन राशी गुणोत्तर श्रेढींत असतील तर क, ख, ग सुद्धा गुणोत्तर श्रेढींत असतात हें दाखवा.

(२०) जर क, ख, ग आणि घ गुणोत्तर श्रेढींत असतील तर $क^2+ख^2$, $ख^2+ग^2$, $ग^2+घ^2$ या राशीहि गुणोत्तर श्रेढींत असतात हें दाखवा.

[फलकत्ता १९१९

(२१) जर क, ख, ग समांतर श्रेढींत आणि य, र, ल गुणोत्तर श्रेढींत असतील तर

$य^{ख-ग}\times र^{ग-क}\times ल^{क-ख}=१$ हें दाखवा.

(२२) क, ख, ग गुणोत्तर श्रेढींत असून य आणि र हीं क्रमशः क, ख आणि ख, ग यांमधील समांतर मध्यकें असल्यास

$\frac{क}{य}+\frac{ख}{र}=२$ आणि $\frac{१}{य}+\frac{१}{र}=\frac{२}{ख}$ हें दाखवा.

(२३) एका गुणोत्तर श्रेढीचें $(त+थ)$ वें पद $=म$ असून $(त-थ)$ वें पद $=न$ आहे तर त वें आणि थ वें पद काढा.

(२४) एका समांतर श्रेढीचें आद्य पद एका गुणोत्तर श्रेढींतील आद्यपदासमान असून पहिलीचा प्रचय आणि दुसरीची साधारण निष्पत्ति दोन्हीहि २ च्या समान आहेत. प्रत्येक श्रेढींतील ५ पदांचा योगहि समान असल्यास प्रत्येकीचें ५ वें पद काढा.

५.४ समांतर गुणोत्तर श्रेढी (arithmetico-geometric series)— क, (क+ख) न, (क+२ख)न$^{2}$, (क+३ख) न$^{3}$,............ या श्रेढीचें निरीक्षण करा.

तिच्या प्रत्येक पदांत दोन अवयव आहेत, आणि

१ लें पद क आणि १ यांचा गुणाकार आहे.

२ रें पद (क+ख) आणि न यांचा गुणाकार आहे.

३ रें पद (क+२ख) आणि न$^{2}$ यांचा गुणाकार आहे.

४ थें पद (क+३ख) आणि न$^{3}$ यांचा गुणाकार आहे.

यावरून असें दिसून येतें की या श्रेढींतील पदें अंशतः समांतर श्रेढीच्या आणि अंशतः गुणोत्तर श्रेढीच्या नियमानुसार निर्माण झालीं आहेत.

क, क+ख, क+२ख,...... ही समांतर श्रेढी असून

१, न, न$^{2}$, ......ही गुणोत्तर श्रेढी आहे. अशा प्रकारच्या श्रेढीस समांतर गुणोत्तर श्रेढी म्हणतात.

५.४१ समांतर गुणोत्तर श्रेढीच्या स पदांचा योग— क, (क+ख)न, (क+२ख)न$^{2}$,.......ह्या श्रेढींत स पदें आहेत असें समजा.

तिच्या स पदांच्या योगाचें यों ने अभिधान केल्यास

$$यो = क + (क+ख)\,न + (क+२ख)\,न^{2} + \ldots\ldots + [क+(स-१)ख]\,न^{स-१} \ldots\ldots\ldots (अ)$$

(अ) च्या दोन्ही बाजूस गुणोत्तर श्रेढीच्या न या साधारण निष्पत्तीने गुणून

$$\text{यो} \times \text{न} = \text{कन} + (\text{क}+\text{ख})\text{न}^2 + (\text{क}+२\text{ख})\text{न}^3 + \ldots\ldots + [\text{क}+(\text{स}-१)\text{ख}]\text{न}^{\text{स}} \ldots\ldots \text{(आ)}$$

आता, (अ) आणि (आ) मधील न, $\text{न}^2$, $\text{न}^3$,......युक्त पदें एकाखाली एक येतील अशा प्रकारें (अ) आणि (आ) संबंध पुन्हा लिहा.

$$\text{यो} = \text{क} + (\text{क}+\text{ख})\text{न} + (\text{क}+२\text{ख})\text{न}^2 + \ldots\ldots + [\text{क}+(\text{स}-१)\text{ख}]\ \text{न}^{\text{स}-1} \ldots\ldots (१)$$

$$\text{यो} \times \text{न} = \text{कन} + (\text{क}+\text{ख})\text{न}^2 + \ldots\ldots + [\text{क}+(\text{स}-१)\text{ख}]\text{न}^{\text{स}} \ldots\ldots (२)$$

आता (१) मधून (२) उणें करा.

$$\text{यो}\ (१-\text{न}) = \text{क} + \text{खन} + \text{खन}^2 + \ldots\ldots + \text{खन}^{\text{स}-1} - [\text{क}+[\text{स}-१)\text{ख}]\text{न}^{\text{स}}$$

$$= \text{क} + \text{खन}[१+\text{न}+\text{न}^2+\ldots\text{न}^{\text{स}-2}] - [\text{क}+(\text{स}-१)\text{ख}]\text{न}^{\text{स}}$$

उजव्या पक्षांत पहिल्या कंसांत (स − १) पदांची गुणोत्तर श्रेढी आहे. म्हणून

$$\text{यो}\ (१-\text{न}) = \text{क} + \frac{\text{खन}\,[१-\text{न}^{\text{स}-1}]}{१-\text{न}} - [\text{क}+\overline{\text{स}-१}\text{ख}]\text{न}^{\text{स}}$$

$$\text{म्हणून यो} = \frac{\text{क}}{१-\text{न}} + \frac{\text{खन}[१-\text{न}^{\text{स}-1}]}{(१-\text{न})^2} - \frac{[\text{क}+(\text{स}-१)\text{ख}]\ \text{न}^{\text{स}}}{१-\text{न}}$$

= दिलेल्या समांतर गुणोत्तर श्रेढीचा इष्टयोग.

उदाहरण — $१+४य+७य^२+१०य^३+\ldots\ldots$ या श्रेढीच्या स पदांचा योग काढा.

स पदांचा योगाचें यो ने अभिधान केल्यास

$$यो = १ + ४य + ७य^२ + १०य^३ + \ldots\ldots$$
$$+[१+३(स-२)]\,य^{स-२}$$
$$+[१+३(स-१)]\,य^{स-१} \quad \ldots\ldots(अ)$$

दोन्ही पक्षास य ने गुणून

$$यो \times य = य + ४य^२ + ७य^३ + १०य^४ + \ldots\ldots$$
$$+[१+३(स-२)]य^{स-१} + [१+३(स-१)]य^{स} \ldots(आ)$$

अ मधून (आ) उणें करून

$$यो\,(१-य) = १+३य+३य^२\ldots\ldots+३य^{स-१}$$
$$-[१+३\,(स-१)]\,य^{स}$$
$$=१+३य\,[१+य+य^२+\ldots+य^{स-२}]$$
$$-(३स-२)\,य^{स}$$

$$=१+३य\,\frac{१-य^{स-१}}{१-य}-(३स-२)\,य^{स}$$

$$\therefore यो = \frac{१}{१-य}+\frac{३य[१-य^{स-१}]}{(१-य)^२}-\frac{(३स-२)य^{स}}{१-य}$$

$=$ स पदांचा योग.

५.५ अनंत श्रेढी (infinite series)— ज्या श्रेढीतील पदांची संख्या सामित (limited) आहे अशा श्रेढांला सांत श्रेढी (finite series) म्हणतात. उलट ज्या श्रेढांतील

पदांच्या संख्येला अंत नाही तिला अनंत श्रेढी म्हणतात. क, कन, कन$^{२}$,......कन$^{स}$, कन$^{स+१}$,...... ही अनंत गुणोत्तर श्रेढी आहे.

५.५१ अनंत गुणोत्तर श्रेढीचा योग—समजा क, कन, कन$^{२}$, कन$^{३}$,..... ही अनंत श्रेढी आहे हिच्या स पदांचा योग काढून स ला अनंतीप्रवृत्त करा आणि येणाऱ्या फलाचें निरीक्षण करा.

हिच्या पहिल्या स पदांच्या योगाचें यो$_{स}$ ने अभिधान धरून

$$यो_{स} = क \frac{(१ - न^{स})}{१ - न} = \frac{क}{१ - न} - \frac{कन^{स}}{१ - न}$$

याला स सीमातीत असंख्य केल्यास

$$\underset{स \rightarrow \infty}{सी} यो_{स} = \underset{स \rightarrow \infty}{सी} \frac{क}{१ - न} - \underset{स \rightarrow \infty}{सी} \frac{कन^{स}}{१ - न}.$$

स सीमातीत असंख्य केल्यास $\frac{क}{१ - न}$ हें पद स विरहित असल्यामुळे त्याची अहीं सदैव $\frac{क}{१ - न}$ राहते परंतु $\frac{क}{१ - न} न^{स}$ या पदांत स हा अंशांतील न चा घात आहे तेव्हा न, संख्येने (numerically) १ पेक्षा अधिक असेल तर जसा जसा स अनंतीप्रवृत्त होतो तसें तसें $\frac{क}{१ - न} न^{स}$ हें पदहि

अनंतीप्रवृत्त होतें. शेवटी स सीमातीत असंख्य केल्यास

$$\frac{फ}{१-न}न^{स} = \infty$$

म्हणून $\underset{स \to \infty}{सी}$ योस $= \frac{फ}{१-न} - \underset{स \to \infty}{सी} \frac{फन^{स}}{१-न}$

म्हणून $\underset{स \to \infty}{सी}$ योस = परिमित राशि – अनंत राशि

= अनंत राशि.

यावरून ज्या अनंत गुणोत्तर श्रेढीची निष्पत्ति संख्येने, १ पेक्षा अधिक असते त्या श्रेढीचा योग अनंत असतो.

आता, न संख्येने पेक्षा लहान असेल तर जसा जसा स अनंतीप्रवृत्त होतो तसें तसें $\underset{स \to \infty}{सी} \frac{फ}{१-न}न^{स}$

हें पद शून्यप्रवृत्त होतें. शेवटीं स सीमातीत असंख्य केल्यास $\frac{फ}{१-न}न^{स} = ०$

म्हणून

$$\underset{स \to \infty}{सी} योस = \frac{फ}{१-न} - \underset{स \to \infty}{सी} \frac{फन^{स}}{१-न}$$

म्हणून $\underset{स \to \infty}{सी}$ योस $= \frac{फ}{१-न} - ०$

$$= \frac{फ}{१-न}$$

= परिमित राशि

यावरून ज्या अनंत गुणोत्तर श्रेढीची निष्पत्ति संख्येने १ पेक्षा लहान असते त्या श्रेढीचा योग परिमित असतो.

म्हणून क, कन$^{२}$, कन$^{३}$,......या अनंत गुणोत्तर श्रेढीचा योग, न संख्येने १ पेक्षा लहान असल्यास, $\frac{क}{१-न}$ असतो.

उदाहरण— १, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{९}$......या अनन्त गुणोत्तर श्रेढीचा योग काढा.

दिलेल्या श्रेढीचें आद्य पद १ आणि साधारण निष्पत्ति $\frac{१}{३}$ आहे तिच्या पहिल्या स पदांचा योग

$$योग_{स} = \frac{\left[१-\left(\frac{१}{३}\right)^{स}\right]}{१-\frac{१}{३}}$$

$$= \frac{१}{१-\frac{१}{३}} - \frac{\left(\frac{१}{३}\right)^{स}}{१-\frac{१}{३}}$$

$$= \frac{३}{२} - \frac{१}{२\times ३^{स-१}}$$

आता स असंख्य केल्यास

$$\lim_{स\to\infty} योग_{स} = \frac{३}{२} - \lim_{स\to\infty} \frac{१}{२\times ३^{स-१}}$$

$$\text{पण} \lim_{स \to \infty} \frac{१}{२ \times ३^{स-१}} = ०$$

म्हणून $यो_{\infty} = \frac{३}{२}$

५.६ अनंत समांतर गुणोत्तर श्रेढीचा योग—

क, (क+ख)न, (क+२ख)न², ...... या अनंत श्रेढीच्या पहिल्या स पदांचा योग ५.४१ च्या अनुच्छेदांत काढला आहे. त्यामध्ये

$$यो_{स} = \frac{क}{१-न} + \frac{ख\,न}{(१-न)^{२}} - \frac{ख\,न^{स}}{(१-न)^{२}} - \frac{[क + (स-१)\,ख]}{१ - न}न^{स}$$

आता स सीमातीत असंख्य केल्यास जर न, संख्येने, १ पेक्षा अधिक असेल तर शेवटची दोन पदें अनंत होतात, आणि

$$यो_{\infty} = \infty$$

परंतु न संख्येने, १ पेक्षा लहान असेल तर शेवटची दोन पदें, प्रत्येकी, पहिल्या दोन पदांशी तुलना केली तर उपेक्षणीय होतात आणि शेवटी त्यांचा लोप होतो.

$$\text{म्हणून } यो_{\infty} = \frac{क}{१-न} + \frac{खन}{(१-न)^{२}}$$

उदाहरण— $\frac{२}{७}+\frac{४}{७^२}+\frac{६}{७^३}+\frac{८}{७^४}+$ ...... या अनंत श्रेढीचा योग काढा. योगाचें यो$_\infty$ ने अभिधान केल्यास

$$यो_\infty = \frac{२}{७}+\frac{४}{७^२}+\frac{६}{७^३}+\frac{८}{७^४}+ \ldots\ldots\infty \quad (१)$$

दोन्ही पक्षास $\frac{१}{७}$ ने गुणून

$$\frac{यो_\infty}{७} = \frac{२}{७^२}+\frac{४}{७^३}+\frac{६}{७^४}+ \ldots\ldots\infty \quad (२)$$

(१) मधून (२) उणें करून

$$६\frac{यो_\infty}{७} = \frac{२}{७}+\frac{२}{७^२}+\frac{२}{७^३}+\ldots\ldots\infty$$

$$किंवा\ \frac{६}{७}\, यो_\infty = \frac{२}{७}\left[\frac{१}{१-\frac{२}{७}}\right]$$

$$म्हणून\ यो_\infty = \frac{७}{१८}$$

५.७ आवर्त-दशमिक (recurring decimals)— आवर्त-दशमिक हें अनंत गुणोत्तर श्रेढीचें अप्रतिम उदाहरण आहे. आवर्त-दशमिकांमध्ये आवर्त अंक १, २, ३,...जमें असतील तदनुसार अनंत गुणोत्तर श्रेढीची साधारण निष्पत्ति

$\frac{१}{१०}, \frac{१}{१००}, \frac{१}{१०००}$ ....... असते.

आवर्तांच्या संवादी (corresponding) भिन्नाचें प्रतिनिधान अनंत गुणोत्तर श्रेढीच्या योगानें होतें.

आता $\frac{२}{३}$ हा अपूर्णांक दशमिक पद्धतींत ·६६६६......

च्या समान आहे आणि ·६६६६...... या संख्येचें, संक्षिप्त रूपांत ·६ ने अभिधान केलें जातें, हें विद्यार्थ्यांना माहीतच आहे.

आता, $\frac{६}{१०} + \frac{६}{१०^{२}} + \frac{६}{१०^{३}} + \frac{६}{१०^{४}} + ......$ या

*अनंत गुणोत्तर श्रेढीच्या पहिल्या स पदांच्या योगाचें $यो^{स}$ न अभिधान करून*

$$यो_{स} = \frac{२}{३} - \frac{२}{३ \times १०^{स}}$$

आता स सीमातीत असंख्य केल्यास

$$\underset{स \rightarrow \infty}{सी} \; यो_{स} = \frac{२}{३} - \underset{स \rightarrow \infty}{सी} \; \frac{२}{३ \times १०^{स}}$$

$$पण \; \underset{स \rightarrow \infty}{सी} \; \frac{२}{३ \times १०^{स}} = 0$$

$$म्हणून \; \underset{स \rightarrow \infty}{यो_{स}} = \frac{२}{३}$$

यावरून हें स्पष्ट आहे की कोणत्याहि आवर्ताचा संवादी भिन्न हा त्याच्या संवादी अनंत गुणोत्तर श्रेढीच्या योगाएवढा असतो.

म्हणून .६६६६... ने किंवा .$\dot{६}$ अभिधान झालेला $\frac{२}{३}$ हा

अपूर्णांक अन्यपद्धतीने $\frac{६}{१०}+\frac{६}{१०^{२}}+\frac{६}{१०^{३}}+\frac{६}{१०^{४}}+\cdots\infty$

या अनंत गुणोत्तर श्रेढीच्या रूपांत लिहितात.

उदाहरण— .$१\dot{२}\dot{३}$ या आवर्त दशमिकाचा संवादी भिन्न काढा.

$$.१\dot{२}\dot{३} = .१२३२३२३२३२३\ldots\ldots$$

$$= \frac{१}{१०}+\frac{२३}{१०००}+\frac{२३}{१०००००}+\frac{२३}{१००००००००}+\ldots\ldots$$

$$= \frac{१}{१०}+\frac{२३}{१०^{३}}+\frac{२३}{१०^{५}}+\ldots\ldots$$

$$= \frac{१}{१०}+\frac{२३}{१०^{३}}\left[१+\frac{१}{१०^{२}}+\frac{१}{१०^{४}}+\ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{१}{१०}+\frac{२३}{१०^{३}}\times\frac{१}{१-\frac{१}{१०^{२}}}$$

$$= \frac{१}{१०}+\frac{२३}{१०^{३}}\times\frac{१०^{२}}{९९}$$

$$= \frac{१}{१०} + \frac{२३}{९९०}$$

$$= \frac{६१}{४९५}$$

म्हणून $.१\dot{2}\dot{3}$ चा $\frac{६१}{४९५}$ हा संवादी भिन्न आहे.

५.८ आवर्त-दशमिकाचा संवादी भिन्न काढण्याची सामान्य रीति—

समजा, द हा दिलेला आवर्त दशमिक आहे त्याचा त हा अनावर्त भाग प अंकी असून थ हा आवर्त भाग फ अंकी आहे.

तेव्हा द = ·तथथथ..............

दोन्ही बाजूस $१०^{प+फ}$ने आणि $१०^{प}$ ने गुणा म्हणजे

$१०^{प+फ} \times द =$ तथ·थथथ .................. (अ)

आणि $१०^{प} \times द =$ त·थथथ ...................... (आ

(अ) मधून आ उणे करुन

$$१०^{प} \times द\, (१०^{फ} - १) = तथ - त$$

$$\text{म्हणून} \quad द = \frac{तथ - त}{१०^{प}(१०^{फ} - १)}$$

म्हणून द या आवर्त-दशमिकाचा

$\frac{तथ - त}{१०^{प}(१०^{फ} - १)}$ हा संवादी भिन्न आहे.

आता, $१०^{फ}-१$ ही राशि फ अंकी असून तिच्यांतील प्रत्येक अंक ९ आहे. तिला $१०^{प}$ ने गुणिल्यास, $१०^{प}(१०^{फ}-१)$ ही राशि (प+फ) अंकी असून तिचे पहिले फ अंक प्रत्येकीं ९ व नंतरचे प अंक प्रत्येकीं शून्य आहेत.

या निरीक्षणावरून, कोणत्याहि आवर्त-दशमिकाचा संवादी भिन्न काढण्याकरिता खालील नियम देतां येतो.

कोणत्याहि-आवर्त दशमिकाच्या संवादी भिन्नाचा अंश हा त्या आवर्त-दशमिकांत असणाऱ्या अनावर्त भागापुढें आवर्त भाग मांडून येणाऱ्या राशींतून अनावर्त भाग उणें करून येणारी राशि असतो, आणि छेद हा आवर्त भागांतील अंकाइतके ९ क्रमानें मांडून त्यापुढें अनावर्त भागांतील अंकाइतकीं शून्यें मांडून येणारा राशि असतो.

उदाहरण— वरील नियमानें $\cdot १\dot{२}\dot{३}$ चा संवादी भिन्न काढा.

संवादी भिन्नाचा अंश = १२३ − १ = १२२

यांत दोन आवर्त अंक असून एक अनावर्त अंक आहे.

म्हणून त्याचा हर = ९९०

म्हणून संवादी भिन्न = $\frac{१२२}{९९०} = \frac{६१}{४९५}$

## प्रश्नसंग्रह ६

(१) निम्न श्रेढींचे योग काढा.

(क) $१ + ३य + ५य^{२} + ७य^{३} + \ldots\ldots$ स पदापर्यंत

(ख) $१ + \frac{२}{२} + \frac{३}{२^२} + \frac{४}{२^३} + \ldots\ldots$ स पदापर्यंत

(ग) $६ \times ७ + ११ \times ७^२ + १६ \times ७^३ + \ldots\ldots$ स पदापर्यंत

(२) खालील अनंत श्रेढींचे योग काढा.

(१) $\sqrt{३} + १ + \frac{१}{\sqrt{३}} + \ldots\ldots \infty$ पर्यंत

(२) $३ - १ + \frac{१}{३} - \frac{१}{९} + \ldots\ldots \infty$ पर्यंत

(३) $\sqrt{५} + \frac{१}{\sqrt{५}} + \frac{१}{५\sqrt{५}} + \ldots\ldots \infty$ पर्यंत

(४) $(\sqrt{२}+१) + १ + (\sqrt{२}-१) + \ldots\ldots \infty$ पर्यंत

(३) खालील श्रेढींचे योग काढा.

(क) $\frac{२}{६} + \frac{३}{६^२} + \frac{२}{६^३} + \frac{३}{६^४} + \ldots\ldots \infty$

(ख) $१ + \frac{२}{५} + \frac{३}{५^२} + \ldots\ldots \infty$

(ग) $१ + \frac{३}{२} + \frac{५}{४} + \frac{७}{८} + \ldots\ldots \infty$

(घ) $\frac{१}{३} + \frac{३}{९} + \frac{५}{२७} + \ldots\ldots \infty$

(४) खालील श्रेढींचे योग काढा.

(क) $३ + ५,\ ६ + २५,\ ९ + १२५, \ldots\ldots$ स पदापर्यंत

(ख) $य + क,\ य^२ + २क,\ य^३ + ३क, \ldots\ldots$ स पदापर्यंत

[कलकत्ता

(ग) $\frac{क}{य} - \frac{ख}{य^{२}}, \frac{क}{य^{३}} - \frac{ख}{य^{४}}, \ldots\ldots \infty \quad य^{२} > १$

(घ) $क + ख + ३क + २ख + ५क + ४ख + \ldots\ldots$ २स पदापर्यंत

(५) खालील श्रेढीचा स पदापर्यंत योग काढा व जर अनंतीपर्यंत योग काढणें संभाव्य असेल तर तो काढून दाखवा.

$$१ + \frac{३}{४} + \frac{७}{१६} + \frac{१५}{६४} + \frac{३१}{२५६} + \ldots\ldots$$

(६) एका श्रेढींच्या स पदांचा योग स च्या सर्व अहीं-करिता $क + खय^{स}$ आहे तर तिचें स वें पद काढा आणि श्रेढीची जाति कोणती तें सांगा.

(७) खालील आवर्त दशमिकांचे संवादी भिन्न काढा.

(क) $\cdot३४\dot{६}\dot{२}$ (ख) $०\cdot\dot{५}$ (ग) $\cdot२\dot{३}\dot{७}$

(८) क आणि ख प्रत्येकी १ पेक्षा लहान असून

$य = १ + क + क^{२} + \ldots\ldots \infty$ आणि

$र = १ + ख + ख^{२} + \ldots\ldots \infty$ असतील तर

$$१ + कख + क^{२}ख^{२} + \ldots\ldots \infty = \frac{यर}{य + र - १}$$

सिद्ध करा.

(९) १, २, ३,...... स ही आद्य पदें असलेल्या स अनंत गुणोत्तर श्रेढींचे योग क्रमशः $यो_{१}$, $यो_{२}$, $यो_{३}$,........ ......$यो_{स}$ असून त्यांच्या साधारण निष्पत्ती क्रमशः

$\frac{१}{२}, \frac{१}{३}, \frac{१}{४}, \frac{१}{५}, \ldots\ldots \frac{१}{स+१}$ या आहेत तर

$यो_१ + यो_२ + यो_३ + \ldots + यो_स = \frac{स}{२}(स+३)$

आहे हें दाखवा.

[मुंबई

(१०) $[३ \times ३^{\frac{१}{२}} \times ३^{\frac{१}{४}} \times ३^{\frac{१}{८}} \times ३^{\frac{१}{१६}} \times \ldots\ldots$ अनंतीपर्यंत]
ची अर्हा काढा

# प्रकरण सहावें

## हरात्मक श्रेढी

(harmonical progression)

६.१ जर $\frac{क}{ग} = \frac{क-ख}{ख-ग}$ असेल तर क, ख, आणि ग हरात्मक श्रेढींत आहेत असें म्हणतात.

एखाद्या श्रेढीची कोणतीहि लागोपाटचीं तीन पदें हरात्मक श्रेढींत असल्यास त्या श्रेढीस हरात्मक श्रेढी म्हणतात.

६.११ हरात्मक श्रेढींतील पदांचे व्युत्क्रम समांतर श्रेढीत असतात.

क, ख, ग हरात्मक श्रेढींत आहेत

म्हणून $\frac{क}{ग} = \frac{क-ख}{ख-ग}$

किंवा कख − कग = गक − गख

या समीकाराला कखग ने सर्वांस भागून

$$\frac{१}{ग} - \frac{१}{ख} = \frac{१}{ख} - \frac{१}{क}$$

ह्या संबंधावरून $\frac{१}{क}, \frac{१}{ख}, \frac{१}{ग}$, समांतर श्रेढींत आहेत हें सिद्ध होतें.

६.२ हरात्मक मध्यक— क आणि ख या कोणत्याहि दोन राशींच्यामध्ये म चा निवेश करून जर, क, म, ख ही हरात्मक श्रेढी होत असेल तर म ला क आणि ख यांमधील हरात्मक मध्यक म्हणतात.

६.२१ हरात्मक मध्यकाची अहा काढणें—
म हा क आणि ख यांमधील हरात्मक मध्यक असल्यास $\frac{१}{क}, \frac{१}{म}, \frac{१}{ख}$ समांतर श्रेढी होते.

म्हणून $\frac{१}{म} - \frac{१}{क} = \frac{१}{ख} - \frac{१}{म}$

किंवा $\frac{२}{म} = \frac{१}{क} + \frac{१}{ख}$

म्हणून $म = \frac{२ क ख}{क + ख}$

तेव्हा कोणत्याहि दोन राशींमधील हरात्मक मध्यक त्या दोन राशींच्या गुणाकाराच्या दुपटास त्यांच्या योगाने भागून येणाऱ्या राशीसमान असतो.

६.२२ हरात्मक मध्यकें— क आणि ख या कोणत्याहि दोन राशींच्यामध्ये $म_1, म_2, म_3, \ldots म_प$ चा निवेश करून जर $क, म_1, म_2, \ldots म_प, ख$ ही हरात्मक श्रेढी होत असेल तर $म_1, म_2, \ldots म_प$, यांना क आणि ख यांमधील हरात्मक मध्यकें म्हणतात.

उदाहरण— ३ आणि २४ यांच्यामध्ये ६ हरात्मक मध्यकांचा निवेश करा.

$म_1, म_2, म_3 \ldots\ldots म_6$ हीं इष्ट मध्यकें आहेत असें समजा.

म्हणून $\frac{१}{३}, \frac{१}{म_1}, \frac{१}{म_2}, \ldots\ldots \frac{१}{म_6}, \frac{१}{२४}$ ही ८ पदांची समांतर श्रेढी होते.

जर या समांतर श्रेढीचा प्रचय च असेल तर

$$\frac{१}{२४} = \frac{१}{३} + ७ \text{ च}$$

$$\text{किंवा च} = -\frac{१}{२४}$$

यावरून $\frac{१}{म_1}, \frac{१}{म_2}, \frac{१}{म_3} \ldots \frac{१}{म_6}$ क्रमशः

$\frac{७}{२४}, \frac{६}{२४}, \frac{५}{२४}, \ldots\ldots \frac{२}{२४}$ आहेत.

म्हणून इष्ट हरात्मक मध्यकें—

$\frac{२४}{७}, ४, \frac{२४}{५}, \ldots\ldots १२$ हीं आहेत.

६.३ कोणत्याहि दोन घन राशींमधील (१) समांतर मध्यक (२) गुणोत्तर मध्यक आणि (३) हरात्मक मध्यक ह्या तीन राशी स्वतःच गुणोत्तर श्रेढींत असतात. आणि त्यांच्या महत्तेत अवरोही (descending) क्रमांत असतात.

क आणि ख या दोन राशींमधील समांतर गुणोत्तर आणि हरात्मक मध्यकें अनुक्रमें सा, गा आणि हा आहेत असें समजा.

म्हणून परिभाषेवरून

$$सा = \frac{क + ख}{२}$$

$$गा = \sqrt{कख}$$

$$हा = \frac{२कख}{क + ख}$$

$$आता\ सा \times हा = \frac{क + ख}{२} \times \frac{२\,कख}{क + ख}$$

$$= कख$$

$$= (\sqrt{कख})^{२}$$

$$= गा^{२}$$

यावरून, सा गा आणि हा गुणोत्तर श्रेढींत असून गा हें गुणोत्तर मध्यक आहे.

$$आता,\ सा - गा = \frac{क + ख}{२} - \sqrt{क}\sqrt{ख}$$

$$=\frac{क+ख-२\sqrt{क}\sqrt{ख}}{२}$$

$$=\frac{[\sqrt{क}-\sqrt{ख}]^{२}}{२}$$

क आणि ख या धन राशी असल्यामुळें $\sqrt{क}$ आणि $\sqrt{ख}$ या वास्तविक राशी आहेत.

म्हणून $(\sqrt{क}-\sqrt{ख})$ सुद्धा वास्तविक आहे.

म्हणून $(\sqrt{क}-\sqrt{ख})^{२}$ सदैव धनच राहील.

म्हणून सा $>$ गा

अर्थात् कोणत्याहि दोन धन राशींमधील समांतर मध्यक, त्यांतील गुणोत्तर मध्यकांपेक्षा अधिक असतें.

आता गा हे सा आणि हा यांमधील गुणोत्तर मध्यक असल्यामुळे गा ची अर्हा सा आणि हा यांच्यामध्येंच असावयास पाहिजे. सा $>$ गा सिद्ध केलेंच आहे.

म्हणून गा $>$ हा

अर्थात् कोणत्याहि दोन धन राशींमधील समांतर, गुणोत्तर आणि हरात्मक मध्यकें अवरोही क्रमांत असतात.

६.३१ हरात्मक श्रेढींतील पदांचा योग काढण्याकरितां कोणतेंहि सूत्र नाहीं प्रत्यक्ष योग करूनच तो काढावा लागतो.

६.३२ उदाहरण— जर, य, र आणि ल हरात्मक श्रेढींत असतील तर य, (य – ल), (य – र) ह्या राशी आणि ल, (ल – य), (ल – र) ह्या राशीहि हरात्मकश्रेढींत असतात.

समजा, य, य − ल, य − र हरात्मक श्रेढींत आहेत.
तर परिभाषेवरून

$$\frac{य}{य - र} = \frac{य - (य - ल)}{(य - ल) - (य - र)}$$

अर्थात् $$\frac{य}{य - र} = \frac{ल}{र - ल}$$

किंवा $$\frac{य}{ल} = \frac{य - र}{र - ल}$$

परंतु हा प्रतिबंध य, र आणि ल हरात्मक श्रेढींत असल्यामुळे पाडला जातोच म्हणून य, य − ल, य − र ह्या राशी हरात्मकश्रेढींत आहेत.

त्याचप्रमाणे ल, ल − य, ल − र या राशी हरात्मक श्रेढींत आहेत हें दाखवितां येईल.

## प्रश्नसंग्रह ७

(१) हरात्मक मध्यकांचा निवेश करा.

(अ) $\frac{१}{४}$ आणि $\frac{१}{३२४}$ यांच्यामध्ये ४ हरात्मक मध्यकें

(आ) ४ आणि २ यांच्यामध्ये ३ हरात्मक मध्यकें

(इ) १ आणि ३० यांच्यामध्ये ४ हरात्मक मध्यकें

(ई) १६ आणि $\frac{१}{२३}$ यांच्यामध्यें ५हरात्मक मध्यकें

(२) एका हरात्मक श्रेढीच्या तीन अनुगामी पदांचा योग $\frac{४७}{६०}$ आहे आणि आद्य पद $\frac{१}{३}$ आहे तर ती श्रेढी काढा.

(३) ज्या हरात्मक श्रेढीचें आद्यपद क, अंत्यपद ग आणि पदसंख्या स आहे त्या श्रेढीचें न वें पद काढा.

[मद्रास

(४) एका हरात्मक श्रेढीचें त वें पद थ आणि थ वें पद त आहे तर न वें पद $\frac{त \times थ}{न}$ आहे, हें सिद्ध करा.

[अलाहाबाद

(५) एका हरात्मक श्रेढीचें म वें पद न, आणि न वें पद म आहे तर (म + न) वें पद $\frac{त \times थ}{त + थ}$ आहे हें दाखवा.

(६) एका हरात्मक श्रेढीचें त वें, थ वें आणि द वें पद क्रमशः क, ख आणि ग आहे तर

(थ − द)ख ग + (द − त)क ग + (त − थ)क ख = ०

हें सिद्ध करा.

(७) जर (र − य) आणि (र − ल) यांमधील हरात्मक मध्यक २(र − क) असेल तर (य − क), (र − क) आणि (ल − क) ह्या राशी गुणोत्तर श्रेढींत असतात हें दाखवा.

(८) दोन राशींतील हरात्मक मध्यक १४$\frac{२}{५}$ आणि गुणोत्तर मध्यक २४ आहे तर त्या राशी काढा.

(९) दोन राशींमधील समांतर मध्यक त्यांच्या गुणोत्तर मध्यकापेक्षा $\frac{३}{२}$ ने अधिक आहे, आणि गुणोत्तर मध्यक हरात्मक मध्यकापेक्षा $\frac{६}{५}$ ने अधिक आहे तर त्या राशी काढा. [कलकत्ता

(१०) दोन राशींमधील $य_१$ आणि $य_२$, हीं समांतर मध्यकें, $र_१$ आणि $र_२$ हीं हरात्मक मध्यकें आणि $ल_१$, आणि $ल_२$ हीं गुणोत्तर मध्यकें आहेत तर

$य_१र_२ = य_२र_१ = ल_१ ल_२$ आहेत हें सिद्ध करा.

(११) क आणि ख या दोन राशींमधील $सा_१$ आणि $सा_२$ हीं समांतर मध्यकें, $गा_१$ आणि $गा_२$ हीं गुणोत्तर मध्यकें, आणि $हा_१$ आणि $हा_२$ हीं हरात्मक मध्यकें आहेत तर

$\frac{गा_१ गा_२}{हा_१ हा_२} = \frac{सा_१ + सा_२}{हा_१ + हा_२}$ आहे हें दाखवा. [नागपुर

(१२) एका समांतर आणि एका हरात्मक श्रेढींचीं आद्यपदें, अन्त्यपदें आणि पदसंख्या समान असल्यास एकीच्या आरंभापासून न वें पद आणि दुसरीच्या अंतापासून न वें पद यांचा गुणाकार न विरहित आहे हें दाखवा.

(१३) त, थ, द, समांतर श्रेढींत आहेत तर

$$\frac{थद}{तथ + तद}, \quad \frac{दत}{तथ + थद}, \quad \frac{तथ}{दत + दथ}$$

हरात्मक श्रेढींत आहेत हें सिद्ध करा.

[नागपुर १९३९.

(१४) जर $क^य = ख^र = ग^ल$ आणि क, ख, ग गुणोत्तर श्रेढींत असतील तर य, र, ल या राशी हरात्मक श्रेढींत आहेत हें सिद्ध करा.

(१५) जर य, र, ल या तीन राशी हरात्मक श्रेढींत असतील तर

$$\frac{य}{र+ल-य}, \frac{र}{ल+य-र}, \frac{ल}{य+र-ल}$$ ह्या राशीहि

हरात्मक श्रेढींत आहेत हें सिद्ध करा.

(१६) जर $क_1, क_2, क_3, क_4$ हरात्मक श्रेढींत असतील तर.

$$\frac{क_1}{क_2+क_3+क_4}, \frac{क_2}{क_1+क_3+क_4}, \frac{क_3}{क_4+क_1+क_2},$$

आणि $\frac{क_4}{क_1+क_2+क_3}$ ह्या चार राशीहि हरात्मक

श्रेढींत आहेत हें दाखवा.

(१७) जर क, ख, ग समांतर श्रेढींत, $क_1, ख_1, ग_1$ हरात्मक

श्रेढींत आणि $\frac{क_1}{ग_1}+\frac{ग_1}{क_1}=\frac{क}{ग}+\frac{ग}{क}$ असेल तर $कक_1$,

$खख_1$, $गग_1$ गुणोत्तर श्रेढींत आहेत हें दाखवा.

[कलकत्ता

(१८) जर $क_१$ हें कग आणि कख यांमधील; $ख_१$ हें कख आणि खग यांमधील आणि $ग_१$ हें कग आणि खग यांमधील गुणोत्तर मध्यक असेल आणि जर क, ख, ग, समांतर श्रेढींत असतील तर $क_१^२$, $ख_१^२$, $ग_१^२$ समांतर श्रेढींत आणि $ख_१+ग_१$, $ग_१+क_१$ आणि $क_१+ख_१$ हरात्मक श्रेढींत आहेत हें सिद्ध करा.

[मद्रास १८९०

६.५ प्राकृतिक संख्या (natural numbers)—
१, २, ३, ४......स, स+१, स+२,...यांना प्राकृतिक संख्या म्हणतात.

६.५१ पहिल्या स प्राकृतिक संख्यांचा योग—
१, २, ३, ४,........,स−१,स ही समांतर श्रेढी असून तिचा प्रचय १ आहे.

$$\text{म्हणून योग} = \frac{स}{२}[२+(स-१)]$$

$$= \frac{स}{२}(स+१)$$

म्हणून पहिल्या स प्राकृतिक संख्यांचा योग

$$= \frac{स}{२}(स+१)$$

६.५२ पहिल्या स प्राकृतिक संख्यांच्या वर्गांचा योग—

इष्ट योगाचा $योस_{}$ ने निर्देश करून

$$यो_स = १^२ + २^२ + ३^२ + \dots\dots\dots + स^२$$

आता, $स^३ - (स-१)^३ \equiv ३स^२ - ३स + १$

या ऐकात्म्यांत स ऐवजी १, २, ३,...... यांचा क्रमाने आदेश करा.

म्हणजे
$$\begin{aligned}
१^३ - ०^३ &= ३\times१^२ - ३\times१ + १\\
२^३ - १^३ &= ३\times२^२ - ३\times२ + १\\
३^३ - २^३ &= ३\times३^२ - ३\times३ + १\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(स-२)^३ - (स-३)^३ &= ३(स-२)^२ - ३(स-२) + १\\
(स-१)^३ - (स-२)^३ &= ३(स-१)^२ - ३(स-१) + १\\
स^३ - (स-१)^३ &= ३स^२ - ३स + १
\end{aligned}$$

या सर्व ऐकात्म्यांच्या वाम पक्षाचा स्तंभवत् योग

≡त्यांच्या दक्षिण पक्षाचा स्तंभवत् योग

म्हणून
$$स^३ = ३[१^२ + २^२ + ३^२ + \dots + स^२] - ३[१ + २ + ३ + \dots + स] + स$$

$$= ३यो_स - ३\frac{स(स+१)}{२} + स$$

$$\therefore ३यो_स = स^३ + \frac{३स(स+१)}{२} - स$$

$$= स(स+१)\left(स - १ + \frac{३}{२}\right)$$

$$= \frac{स(स+१)\ (२स+१)}{२}$$

$$\therefore\ यो_{स} = \frac{स(स+१)\ (२स+१)}{६}$$

६.५२ पहिल्या स प्राकृतिक संख्यांच्या घनांचा योग—
इष्ट योगाचा $यो_{स}$ ने निर्देश करून

$$यो_{स} = १^{३} + २^{३} + ३^{३} + \ldots\ldots + स^{३}$$

आता, $स^{४} - (स-१)^{४} = ४स^{३} - ६स^{२} + ४स - १$

$$(स-१)^{४} - (स-२)^{४} = ४(स-१)^{३} - ६(स-१)^{२} + ४(स-१) - १$$

$$(स-२)^{४} - (स-३)^{४} = ४(स-२)^{३} - ६(स-२)^{२} + ४(स-२) - १$$

..........................................................................

..........................................................................

$$३^{४} - २^{४} = ४\times३^{३} - ६\times३^{२} + ४\times३ - १$$

$$२^{४} - १^{४} = ४\times२^{३} - ६\times३^{२} + ४\times२ - १$$

$$१^{४} - ०^{४} = ४\times१^{३} - ६\times१^{२} + ४\times१ - १$$

या सर्व ऐकात्म्यांच्या वाम पक्षांचा स्तंभवत् योग
= त्यांच्या दक्षिण पक्षांचा स्तंभवत् योग

म्हणून $स^{४} = ४(१^{३} + २^{३} + ३^{३} + \ldots + स^{३}) - (१^{२} + २^{२} + ३^{२} + \ldots + स^{२}) + ४(१ + २ + ३ + \ldots + स) - स$

किंवा $स^४ = ४यो_स - ६(१^२+२^२+३^२+\ldots+स^२)$
$+४(१+२+३+\ldots+स) - स$

$$= ४यो_स - ६\frac{स(स+१)\ (२स+१)}{६} + \frac{४स(स+१)}{२} - स$$

म्हणून $४यो_स = स^४ + स + स\ (स+१)\ (२स+१) - २स\ (स+१)$

$= स\ (स+१)\ [स^२ - स + १ + २स + १ - २]$

$= स\ (स+१)\ (स^२ + स)$

$$म्हणून\ \ यो_स = \frac{स^२\ (स+१)]^२}{४}$$

$$= \left[\frac{स\ (स+१)}{२}\right]^२$$

म्हणून स प्राकृतिक संख्यांच्या घनांचा योग त्यांच्या योगाच्या वर्गासमान आहे.

६.६ य संकेतना [Σ notation]— कोणत्याहि श्रेढीचें सामान्यपद त्याच पदाच्या क्रमांकाचें श्रित असतें. म्हणून तें पद आणि पद संख्या माहीत असल्यास श्रेढी पुढे दिल्याप्रमाणे मांडतां येते.

उदाहरण—

(१) $१+२+३+\ldots+(स-१)+स = \sum_{ध=१}^{ध=म} ध$

(२) $\frac{१}{२}+६+\frac{१}{१८}+\cdots+\frac{१}{२.३^{स-२}}+\frac{१}{२.३^{स-१}}$

$$= \sum_{घ=१}^{घ=स} \frac{१}{२\times३^{घ-१}}$$

(३) $क+(क+च)+(क+२च)+\ldots\ldots[क+(स-२)च]$

$$+[क+(स-१)च]=\sum_{घ=१}^{घ=स}[क+(घ-१)च]$$

य संकेतना दत्तश्रेढीच्या सामान्य पदाच्या मागे लिहितात. सामान्य पदासारख्याच सर्व पदांचा योग करावा असें य संकेतनेमुळ समजलें जातें. श्रेढीच्या कोणत्या पदापासून कोणत्या पदापर्यंत योग करावयाचा आहे हें समजण्याकरिता य च्या खाली आद्य पदांक लिहून य च्या वर अंत्यपदांक लिहितात.

$\therefore \sum_{घ=१}^{घ=स} घ^{२}$ याचा अर्थ असा की,

घ ऐवजी १, २, ३, ४......(स−१), स यांचा क्रमाने आदेश करून यणाऱ्या सर्व पदांचा योग काढावयाचा आहे.

६.७ कांही सोडविलेलीं उदाहरणें

उदाहरण १— क, क+च, क+२च,......या समांतर श्रेढीच्या पहिल्या स पदांच्या वर्गांचा योग काढा.

नव्या श्रेढीच्या योगाचा यो ने निर्देश केल्यास

$$यो = क^2 + (क+च)^2 + (क+२च)^2 + \ldots [क+(स-१)च]^2$$

आता सामान्य पद $प_घ = [क + (घ-१)च]^2$

$$= क^2 + च^2(घ-१)^2 + २क \times च(घ-१)$$

म्हणून

$$यो = \sum_{घ=१}^{घ=स} प_घ$$

$$= \sum_{घ=१}^{घ=स} [क + (घ-१)च]^2$$

$$= \sum_{घ=१}^{घ=स} [क^2 + च^2(घ-१)^2 + २क\,च(घ-१)]$$

$$= \sum_{घ=१}^{घ=स} क^2 + च^2 \sum_{घ=१}^{घ=स} (घ-१)^2 + २क\,च \times \sum_{घ=१}^{घ=स} (घ-१).$$

$$= सक^2 + च^2 \frac{स(स-१)(२स-१)}{६} + २कच \frac{स(स-१)}{२}$$

$$= सक^2 + च^2 \frac{स(स-१)(२स-१)}{६}$$

$$+ कचस(स-१)$$

उदाहरण २— $१\times३\times५ + २\times५\times८ + ३\times७\times११ + \ldots\ldots$

या श्रेढीच्या स पदांचा योग काढा.

पहिल्या ३ पदांचे निरीक्षण केल्यास दिसून येतें की प्रत्येक पदांत ३ अवयव असून पहिला अवयव त्या पदाच्या क्रमांका एवढा आहे. प्रत्येक पदांतील अवयव समांतर श्रेढींत असून त्या श्रेढींचा प्रचय पदाच्या क्रमांकापेक्षा १ ने अधिक आहे यावरून सामान्य पद

$$प_स = स\times(स+स+१) \times (स+२स+२)$$

$$= स(२स+१)(३स+२)$$

$$= ६\times स^3 + ७\times स^2 + २स$$

आता स ला १, २, ३...... स या अर्हा क्रमाने देऊन

$$प_1 = ६\times१^3 + ७\times१^2 + २\times१$$

$$प_2 = ६\times२^3 + ७\times२^2 + २\times२$$

..................................

..................................

..................................

$$प_स = ६\times स^3 + ७\times स^2 + २\times स$$

स्तंभवत् योग करून

$$प_1 + प_2 + प_3 + \ldots\ldots + प_स$$

$$= ६(१^3 + २^3 + ३^3 + \ldots\ldots + स^3)$$

$$+७(१^२+२^२+\ldots+स^२)$$
$$+२[१+२+३+\ldots+स]$$
$$यो = ६\left[\frac{(स)(स+१)}{२}\right]^२ + ७\frac{स(स+१)(२स+१)}{६} + \frac{२स(स+१)}{२}$$
$$= \frac{३}{२}(स^२+स)^२ + \frac{७}{६}\left[स(स+१)(२स+१)\right] + स(स+१)$$
$$= \frac{स(स+१)}{६}[९स^२+९स+१४स+७+६]$$
$$= \frac{स(स+१)(९स^२+२३स+१३)}{६}$$

उदाहरण ३—

५+५५+५५५+ ......... या श्रेढीच्या स पदांचा योग काढा.

इष्ट योगाचा यो ने निर्देश करून

यो = ५ + ५५ + ५५५ + ......... स पदांपर्यंत

= ५ [१+११ + १११ + ......... स पदांपर्यंत]

दोन्ही पक्षास ९ ने गुणून

९ यो = ५ [९+९९+९९९+...... स पदांपर्यंत]

$$=५ [ (१० - १) + (१०^२ - १) + (१०^३ - १)$$
+ ......... स पदांपर्यंत]

$$= ५ \; [१० + १०^२ + १०^३ + \ldots + १०^स - स]$$

$$= ५ \times \frac{१० (१०^स - १)}{९} - ५ स$$

$$= \frac{५०}{९} (१०^स - १) - ५स$$

म्हणून $यो = \frac{५०}{८१} (१०^स - १) - \frac{५ स}{९}$

$$= \frac{५० (१०^स - १)}{८१} - \frac{५ स}{९}$$

दाहरण ४—

$१^२ + (१^२ + २^२) + (१^२ + २^२ + ३^२) + \ldots\ldots$ या श्रेढीच्या स पदांचा योग काढा.

या श्रेढीचें घवें पद

$$प_घ = १^२ + २^२ + ३^२ + \ldots\ldots\ldots + घ^२$$

$$= \frac{घ (घ + १) (२ घ + १)}{६}$$

र्थात् $प_घ = \frac{१}{६} [२ घ^३ + ३घ^२ + घ]$

आता, इष्ट योगाचा यो ने निर्देश करून

$$यो = \sum_{घ=१}^{घ=स} प_घ$$

$$= \underset{\text{घ}=1}{\overset{\text{घ}=\text{स}}{\text{य}}} \frac{१}{६}\left[२\,\text{घ}^{३}+३\,\text{घ}^{२}+\text{घ}\right]$$

$$= \underset{\text{घ}=1}{\overset{\text{घ}=\text{स}}{\text{य}}} \frac{१}{३}\,\text{घ}^{३} + \underset{\text{घ}=1}{\overset{\text{घ}=\text{स}}{\text{य}}} \frac{१}{२}\,\text{घ}^{२} + \underset{\text{घ}=1}{\overset{\text{घ}=\text{स}}{\text{य}}} \frac{१}{६}\,\text{घ}$$

$$= \frac{१}{३} \underset{\text{घ}=1}{\overset{\text{घ}=\text{स}}{\text{य}}} \text{घ}^{३} + \frac{१}{२} \underset{\text{घ}=1}{\overset{\text{घ}=\text{स}}{\text{य}}} \text{घ}^{२} + \frac{१}{६} \underset{\text{घ}=1}{\overset{\text{घ}=\text{स}}{\text{य}}} \text{घ}$$

$$= \frac{१}{३}\left[\frac{\text{स}\,(\text{स}+१)}{२}\right]^{२} + \frac{१}{२}\,\frac{\text{स}\,(\text{स}+१)\,(२\text{स}+१)}{६} + \frac{१}{६}\,\frac{\text{स}\,(\text{स}+१)}{२}$$

$$= \frac{\text{स}^{२}\,(\text{स}+१)^{२}}{१२} + \frac{\text{स}\,(\text{स}+१)\,(२\,\text{स}+१)}{१२} + \frac{\text{स}\,(\text{स}+१)}{१२}$$

$$= \frac{\text{स}\,(\text{स}+१)}{१२}\left[\text{स}\,(\text{स}+१)+(२\text{स}+१)+१\right]$$

$$= \frac{\text{स}\,(\text{स}+१)}{१२}\,(\text{स}^{२}+३\text{स}+२)$$

$$= \frac{\text{स}\,(\text{स}+१)\,(\text{स}+१)\,(\text{स}+२)}{१२}$$

$$= \frac{\text{स}\,(\text{स}+१)^{२}\,(\text{स}+२)}{१२}$$

## प्रश्नसंग्रह ८

(१) खालील श्रेढींचा स पदांचे योग काढा—

(क) $२^२+४^२+६^२+८^२+......$

(ख) $१^२+३^२+५^२+७^२+......$

(ग) $५\times१^२+६\times२^२+७\times३^२+......$

(घ) $२\times१^२+३\times२^२+४\times३^२+......$

(च) $२^२+५^२+८^२+......$

(छ) $१^३+३^३+५^३+......$

(ज) $१^२-२^२+३^२-४^२+५^२-६^२+......$

(२) कोणत्याहि अनुगामी पूर्णांकाच्या घनांच्या योगाला त्यांच्या योगाने निशेष भाग जातो हें दाखवा.

(३) खालील श्रेढींचे स वें पद आणि स पदांचा योग काढा.

(क) $२+५+१०+१७+......$ [फलकत्ता

(ख) $२+७+१४+२३+......$ [मुंबई

(ग) $२+६+१४+३०+......$ [फलकत्ता

(४) जर $यो_१=१+२+३+...+स$,

$यो_२=१^२+२^२+३^२+...+स^२$ तर सिद्ध करा

की $३यो_२+३यो_१+(स+१)=(स+१)^३$

[फलकत्ता

(५) खालील श्रेढींच्या स पदांचा योग काढा.

(क) $१\times२+२\times३+३\times४+.........$

(ख) $२\times३+३\times५+४\times७+.........$

(ग) $१ \times ३ \times ४ + २ \times ५ \times ७ + ३ \times ७ \times १० + \ldots$

(घ) $१ \times १ + २(१+२) + ३(१+२+३) + \ldots$

(ङ) $१^२ \times ३ + २^२ \times ४ + ३^२ \times ५ + \ldots$

(च) $१^२ + (१^२+३^२) + (१^२+३^२+५^२) + \ldots$

(छ) $(१^२+३^२) + (१^२+३^२+५^२+७^२) + (१^२+३^२+५^२+७^२+९^२+११^२) + \ldots$

(ज) $\frac{१^३}{१} + \frac{१^३+२^३}{२} + \frac{१^३+२^३+३^३}{३} + \ldots\ldots$

(झ) $(स-१)१ + (स-२)२ + (स-३)३ + \ldots$

(ञ) $१ \times स^२ + २(स-१)^२ + ३(स-२)^२ + \ldots\ldots + स(१)^२$

(६) खालील श्रेढींचा स पदांपर्यंत योग काढा.

(क) $९+९९+९९९+\ldots\ldots$

(ख) $३+३३+३३३+\ldots\ldots$

(ग) $६+६६+६६६+\ldots\ldots$

# प्रकरण सातवें

## द्विघात समीकार

(quadratic equation)

७.१ ज्या एक-अव्यक्त समीकारांत अव्यक्ताचा उच्चतम घात दोन असतो त्यास द्विघात समीकार म्हणतात.

उदाहरण— $कय^२+खय+ग=०$ हा य ह्या अव्यक्तांत द्विघात समीकार असून त्यांत क, ख, आणि ग हे अचल आहेत. ग या य विरहित पदास समीकाराचें अचल पद म्हणतात.

७.१२ $कय^२+खय+ग=०$ हा द्विघात समीकार सोडवणें—

$कय^२+खय+ग=०$ या समीकारास $य^२$ च्या क या गुणकानें भागून

$$य^२+\frac{ख}{क}य+\frac{ग}{क}=०$$

समीकाराच्या दोन्ही पक्षांत य च्या गुणकाच्या निम-

पदीचा वर्ग अर्थात् $\frac{ख^{2}}{४क^{2}}$ मिळवून आणि उपयुक्त पुनर्रचना करून समीकाराचें रूप

$$\left(य+\frac{ख}{२क}\right)^{2}=\frac{ख^{2}-४कग}{४क^{2}}$$

दोन्ही पक्षाचें वर्गमूळ काढून

$$\therefore य+\frac{ख}{२क}=\pm\frac{\sqrt{ख^{2}-४कग}}{\sqrt{४क^{2}}}$$

किंवा $$य=\frac{-ख\pm\sqrt{ख^{2}-४कग}}{२क}$$

क, ख आणि ग यांच्या पदांत व्यक्त केलेल्या, य च्या वरील अर्हा समीकाराचें समाधान करतात. म्हणून त्यांना समीकाराचीं मूळें (*roots*) म्हणतात.

७.२ कोणत्याहि द्विघात समीकाराला दोनपेक्षा अधिक मूळें नसतात.

$कय^{2}+खय+ग=०$ या सारख्या द्विघात समीकाराचें समाधान करणारीं दोन मूळें असतात हें आपण मागील अनुच्छेदांत पाहिलेंच आहे.

शक्य असेल तर $कय^{2}+खय+ग=०$
या समीकाराला अ, आ, आणि इ हीं तीन मूळें आहेत असें समजा.

आता, प्रत्येक मूळ समीकाराचें समाधान करतें म्हणून

$$क अ^2 + ख अ + ग = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

$$क आ^2 + ख आ + ग = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

$$क इ^2 + ख इ + ग = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

(१) मधून (२) उणें करून

$$क(अ^2 - आ^2) + ख(अ - आ) = 0$$

या समीकारास (अ − आ) ने भागा.

समीकाराचीं मूळें भिन्न आहेत असें गृहीत धरल्यामुळे

$$अ - आ \neq 0$$

$$\therefore क(अ + आ) + ख = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (४)$$

त्याचप्रमाणे (२) आणि (३) वरून

$$क(आ + इ) + ख = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (५)$$

(४) मधून (५) उणें करून

$$क(अ - इ) = 0$$

म्हणून एकतर $क = 0$ किंवा $अ - इ = 0$ असावयास पाहिजे.

पण हीं दोन्हीं फळें उपकल्पनेला (hypothesis) विरोधी आहेत, कारण

$क = 0$ घेतल्यास समीकाराचा घात कमी होतो आणि $अ = इ$ घेतल्यास समीकाराचीं मूळें समान होतात.

म्हणून $क \neq 0$ आणि $अ \neq इ$

यावरून द्विघात समीकाराला दोन पेक्षा अधिक मूळें असतात असें मानणें चूक आहे.

म्हणून द्विघात समीकाराला दोनपेक्षा अधिक मूळें

नसतात.

उदाहरण १—

सोडवा — $य^2 - य - ६ = ०$

यांत क = १, ख = −१ आणि ग = −६

म्हणून $\frac{१ + \sqrt{१ + २४}}{२}$, $\frac{१ - \sqrt{१ + २४}}{२}$ ह्या य च्या दोन अर्हा आहेत.

अर्थात् य = ३ किंवा य = −२

उदाहरण २—

सोडवा — $२य^2 - ३ य - ३ = ०$

(७.१२) वरून

$$य = \frac{३ \pm \sqrt{९ + २४}}{४}$$

$$= \frac{३ \pm \sqrt{३३}}{४}$$

७.२१ द्विघात समीकारांच्या मूळांचें पर्यालोचन (discussion)—

$कय^2 + खय + ग = ०$ या द्विघात समीकाराच्या मूळांचें अ आणि आ यांनी अभिधान केलें तर

$$अ = \frac{-ख + \sqrt{ख^2 - ४कग}}{२क}$$

$$आणि\ आ = \frac{-ख - \sqrt{ख^2 - ४कग}}{२क}$$

$ख^2 - ४कग$ या करणीगत राशीचा विचार केल्यास खालील प्रकार संभवतात.

(१) $ख^2 - ४कग$ ही राशि धन असल्यास तिचें वर्गमूळ काढतां येते.

पुन्हा, ही राशि पूर्ण वर्ग असल्यास तिचें वर्गमूळ परिमेय असतें. म्हणून

(इ) $(ख^2 - ४कग)$ पूर्ण वर्ग असल्यास समीकाराचीं दोन्ही मूळें वास्तविक परिमेय आणि भिन्न असतात.

(२) $ख^2 = ४कग = ०$ असल्यास समीकाराचीं दोन्ही मूळें वास्तविक, आणि समान असतात.

(३) $ख^2 - ४कग$ ही राशि ऋण असल्यास तिचें वर्गमूळ काल्पनिक असतें. म्हणून समीकाराचीं दोन्हीं मूळें संकर किंवा काल्पनिक असतात.

हे सर्व प्रकार खालील प्रमाणें थोडक्यांत लिहितां येतात.

जर $ख^2 \gtreqless ४कग$ असेल

तर $ख^2 - ४कग$ धन, शून्य किंवा ऋण होईल यावरून

(१) जर $ख^2 > ४कग$ तर

समीकाराचीं मूळें वास्तविक आणि भिन्न;

(२) जर $ख^2 = ४कग$ तर समीकाराचीं मूळें वास्तविक आणि समान; आणि (३) जर $ख^2 < ४कग$ तर समीकाराचीं मूळें संकर आणि भिन्न होतील.

या गमकांमुळें द्विघात समीकार न सोडविनांच त्या समीकाराच्या मूळांचें स्वरूप निश्चित होतें. म्हणून ($ख^2-४कग$) या राशीस द्विघात समीकारांचा विवेचक (discriminant) म्हणतात.

टीप— वास्तविक आणि परिमेय गुणक असणाऱ्या समीकारांचीं मूळें करणी किंवा संकर असल्यास ती जोडीनेच येतात हें उदाहरणें सोडवितांना विद्यार्थ्यांच्या लक्षांत येईल.

उदाहरण १— $२य^2-३य+५=०$ ह्या समीकाराचें य च्या कोणत्याच वास्तविक अर्हेने समाधान होत नाहीं हें दाखवा.

या समीकारांत क=२, ख= −३ आणि ग=५

म्हणून $ख^2-४कग=९-४\times२\times५=-३१$

आता विवेचक ऋण आहे म्हणून समीकाराचीं मूळें संकर आहेत. *अर्थात् य च्या कोणत्याच वास्तविक अर्हेने* समीकाराचें समाधान होत नाही.

७.३ द्विघात समीकारांतील गुणक आणि त्यांचीं मूळें यांचा परस्परसंबंध.

$कय^2+खय+ग=०$ या द्विघात समीकाराचीं अ आणि आ ही मूळें घेतल्यास

$$अ = \frac{-ख+\sqrt{ख^2-४कग}}{२क} \quad ......(१)$$

$$आणि\ आ = \frac{-ख-\sqrt{ख^2-४कग}}{२क} \quad ......(२)$$

(१) आणि (२) यांचा योग करून

$$अ+आ = \frac{-ख+\sqrt{ख^2-४कग}}{२क} + \frac{-ख-\sqrt{ख^2-४कग}}{२क}$$

$$= \frac{-ख+\sqrt{ख^2-४कग}-ख-\sqrt{ख^2-४कग}}{२क}$$

$$= \frac{-२ख}{२क}$$

$$= -\frac{ख}{क}$$

आता (१) आणि (२) यांचा गुणाकार

$$अ \times आ = \left[\frac{-ख+\sqrt{ख^2-४कग}}{२क}\right] \times \left[\frac{-ख-\sqrt{ख^2-४कग}}{२क}\right]$$

$$= \frac{ख^2}{४क^2} - \frac{ख^2-४कग}{४क^2}$$

$$= \frac{ग}{क}$$

यावरून

$$\text{मूळांचा योग} = -\frac{ख}{क}$$

आणि मूळांचा गुणाकार $=\frac{ग}{क}$

७.३१ वरील अनुच्छेदांत काढलेले संबंध प्रस्थापित करण्याची अन्यपद्धति—

कय$^2$ + खय + ग = ० या द्विघात समीकारार्ची अ आणि आ हीं मूळें असल्यास (य − अ) आणि (य − आ) हे त्याच्या वाम पक्षांतील अवयव असावयास पाहिजेत. म्हणजेच दिलेल्या समीकाराचें रूपांतर

$(य - अ)\ (य - आ) = ०$

किंवा $य^2 - (अ + आ)\, य + अ \times आ = ०$ ............(१)

होत असले पाहिजे.

आता कय$^2$ + खय + ग = ० याला क ने भागा म्हणजे

$$य^2 + \frac{ख}{क}य + \frac{ग}{क} = ० \quad ............................(२)$$

(१) आणि (२) या दोन्ही समीकारांत य$^2$ चे गुणक समान असून हे दोन्ही समीकार एकच आहेत.

म्हणून त्यांच्या संवादी पदांचे गुणकहि समान आहेत.

म्हणून $अ + आ = -\frac{ख}{क}$

आणि $अ \times आ = \frac{ग}{क}$

या वरून, ज्या द्विघात समीकारांत य$^2$ चा गुणक १

असेल त्याच्या मूळांचा योग य च्या गुणकासमान परंतु विरुद्ध चिह्नाचा असतो आणि त्यांचा गुणाकार समीकारांतील अचल पदासमान असतो.

७.४ समीकाराचीं मूळें दिलीं असल्यास तो समीकार काढणें—

समजा, अ आणि आ हीं एखाद्या समीकाराचीं मूळें आहेत.

म्हणून य=अ किंवा य=आ या अर्हांनी इष्ट समीकाराचें समाधान होतें.

म्हणजेच य−अ किंवा य−आ हेच समीकाराच्या वामपक्षांत असलेल्या पदसंहतीचे अवयव आहेत.

म्हणून इष्ट समीकाराचें रूप :

$$(य-अ)\ (य-आ)=०$$

किंवा $य^२-(अ+आ)\ य+अ\times आ=०$

तेव्हा, दिलेली मूळें असणाऱ्या समीकाराचें

$य^२-$ (मूळांचा योग) य+ (मूळांचा गुणाकार) $=०$
हें रूप होय.

उदाहरण १— २ आणि $-\frac{१}{२}$ हीं मूळें असणारा समीकार काढा.

समीकाराचें रूप $(य-२)\ (य+\frac{१}{२})=०$

किंवा $२य^२ - ३य - २ = ०$

अन्यथा

$$\text{मूळांचा योग} = २ - \frac{१}{२} = \frac{३}{२}$$

$$\text{मूळांचा गुणाकार} = -१$$

म्हणून इष्ट समीकारांचें रूप

$$य^२ - \frac{३}{२}य - १ = ०$$

$$\text{किंवा } २य^२ - ३य - २ = ०$$

जेव्हा दिलेलीं मूळें अपरिमेय किंवा संकर असतात तेव्हा दुसऱ्या पद्धतीचा प्रयोग करणें इष्ट असतें.

उदाहरण २— $(२ + \sqrt{३})$ आणि $(२ - \sqrt{३})$ हीं मूळें असणारा समीकार काढा.

$$\text{मूळांचा योग} = २ + \sqrt{३} + २ - \sqrt{३}$$
$$= ४$$

$$\text{मूळांचा गुणाकार} = (२ + \sqrt{३})(२ - \sqrt{३})$$
$$= ४ - ३$$
$$= १$$

म्हणून इष्ट समीकार $य^२ - ४य + १ = ०$

उदाहरण ३— $-२ \pm ३श$ हीं मूळें असणारा समीकार काढा.

$$\text{मूळांचा योग} = [-२ + ३श] + [-२ - ३श]$$

$= -४$

मूळांचा गुणाकार $= (-२+३श)(-२-३श)$

$= ४ - ९श^२$

$= ४ + ९$ [∵ $श^२ = -१$

$= १३$

म्हणून इष्ट समीकार $य^२ + ४य + १३ = ०$

७.५ एकचीं घनमूळें—

१ चें घनमूळ य ने दर्शविल्यास

$य = \sqrt[३]{१}$

किंवा $य^३ = १$

किंवा $य^३ - १ = ०$

किंवा $(य-१)(य^२+य+१) = ०$

यावरून,

एकतर $(य-१) = ०$, अर्थात् $य = १$

किंवा $य^२ + य + १ = ०$

अर्थात् $य = \frac{-१ \pm \sqrt{-३}}{२}$

म्हणून १ चीं घनमूळें

$१, \frac{-१ \pm \sqrt{-३}}{२}$ हीं आहेत.

यांतील प्रत्येक मूळाचा घन केल्यास १ हा अंक येतो हें प्रत्यक्ष घन करून दाखवितां येतें.

तेव्हा १ ला तीन घनमूळें असून त्यांपैकी एक वास्तविक आणि उरलेलीं दोन अनुबद्ध संकर आहेत.

१ चीं संकर घनमूळें अ आणि आ यांनी दर्शविल्यास तीं $य^{२} + य + १ = ०$ या समीकाराचें समाधान करतात.

म्हणून त्यांचा गुणाकार $अ \times आ = १$ ..............(१)

दोन्ही पक्षांस $अ^{२}$ ने गुणा.

म्हणजे $अ^{३}\ आ = अ^{२}$

पण अ हें १ चें घनमूळ असल्यामुळे $अ^{३} = १$

म्हणून $आ = अ^{२}$ ....................................(२)

त्याचप्रमाणें $अ = आ^{२}$ ................................(३)

हाहि संबंध आपण दाखवूं शकतों.

(२) आणि (३) वरून, अ आणि आ हीं १ चीं संकर घनमूळें अशीं आहेत कीं त्यांपैकी कोणत्याहि एकाचा वर्ग दुसऱ्या समान आहे, हें उघड आहे.

१ चीं संकर घनमूळें ओ आणि $ओ^{२}$ यांनी दाखविण्याची रूढि आहे.

य च्या ओ या अंकीने

$य^{२} + य + १ = ०$ या समीकाराचें समाधान होत असल्यामुळे

$ओ^{२} + ओ + १ = ०$ ....................................(४)

(४) या समीकारावरून असें दिसून येतें की, १ च्या तिन्ही घनमूळांचा योग शून्य असतो.

पुन्हा ओ आणि $ओ^{२}$ ही $य^{२} + य + १ = ०$ चीं मूळें

असल्यामुळं त्यांचा गुणाकार

$ओ \times ओ^2 = १$

म्हणून $ओ^3 = १$

यावरून आपण सिद्ध केलं की

(१) १ च्या दोन संकर घनमूळांचा गुणाकार १ असतो.

(२) आणि $ओ^3$ चा पूर्णांक घातहि १ असतो.

७.५१ स हा घनपूर्णांक असल्यास $ओ^{स} = १$ किंवा ओ किंवा $ओ^2$—

समजा, घ हा एक घन पूर्णांक असून ३ चा अपवर्त्य (multiple) आहे तर स = ३घ

आता $[ओ]^{स} = [ओ]^{३घ} = [ओ^3]^{घ}$

$= १$

समजा, स हा एक घनपूर्णांक आहे पण ३ चा अपवर्त्य नाही.

तेव्हा स = ३ घ + १ किंवा स = ३घ + २

स = ३घ + १ घेतल्यास

$ओ^{स} = ओ^{३घ+१} = ओ^{३घ} \times ओ$

$= ओ$

आता स = ३घ + २ घेतल्यास

$ओ^{स} = ओ^{३घ+२} = ओ^{३घ} \times ओ^2$

$= ओ^2$

उदाहरण १—

$फ^3 + स^3$ चे तीन रेखीय अवयव पाडा.

$क^3+ख^3=(क+ख)(क^2-कख+ख^2)$

आता $१+ओ+ओ^2=०$

म्हणून $-१=ओ+ओ^2$

पुन्हा $+१=ओ^3$

म्हणून $क^3+ख^3=(क+ख)[क^2+(ओ+ओ^2)कख+ओ^3ख^2]$

$=(क+ख)(क+ओख)(क+ओ^2ख)$

उदाहरण २—

१, ओ, व $ओ^2$ हीं १ चीं घनमूळें असल्यास सिद्ध करा कीं $(१+ओ^2)^3=-१$

आता, $(१+ओ^2)^3=१+३ओ^2+३ओ^4+ओ^6$

आता $ओ^3=१$

म्हणून $(१+ओ^2)^3=१+३ओ^2+३ओ+१$

$=१+३(ओ^2+ओ)+१$

पण $१+ओ+ओ^2=०$

म्हणून $(१+ओ^2)^3=१+३(-१)+१$

$=१-३+१$

$=-१$

अन्य पद्धतीनें

$१+ओ+ओ^2=०$

$१+ओ^2=-ओ$

$$\therefore\ (१+ओ^२)^३ = (-ओ)^३$$
$$= -ओ^३$$
$$= -१$$

७.६ ७.३ मधील फलें अत्यंत महत्वाचीं आहेत. त्यांच्या साह्याने दिलेल्या द्विघात समीकरणांच्या मूळांमधील पद-संहतीची अर्हा त्या समीकरणांतील गुणकांच्या पदांत काढतां येते हें खालील उदाहरणावरून दिसून येईल

उदाहरण १—

$य^२ - तय + थ = ०$ या समीकाराची अ आणि आ हीं मूळें असल्यास

(१) $अ^२ + अआ + आ^२$;

(२) $अ^३ + आ^३$;

आणि (३) $अ^४ + आ^४$

यांचें त आणि थ यांच्या पदांत रूप काढा.

अ आणि आ हीं $य^२ - तय + थ = ०$ या समीकारांचीं मूळें असल्यामुळे (७.३) वरून

$$अ + आ = त$$

$$\text{आणि}\quad अ \times आ = थ$$

या फलांचा उपयोग करून

(१) $अ^२ + अ \times आ + आ^२ = अ^२ + २अ \times आ + आ^२ - अ \times आ$
$$= (अ + आ)^२ - अ \times आ$$
$$= त^२ - थ$$

(२) $अ^{३} + आ^{३} = (अ + आ)(अ^{२} - अ \times आ + आ^{२})$

$= [अ + आ][अ^{२} + २अ \times आ + आ^{२} - ३अ \times आ]$

$= [अ + आ][(अ + आ)^{२} - ३अ \times आ]$

$= त[त^{२} - ३थ]$

$= त^{३} - ३तथ$

(३) $अ^{४} + आ^{४} = अ^{४} + आ^{४} + २अ^{२} \times आ^{२} - २अ^{२}आ^{२}$

$= [अ^{२} + आ^{२}]^{२} - २अ^{२} \times आ^{२}$

$= [अ^{२} + आ^{२} + २अ \times आ - २अ \times आ]^{२} - २अ^{२} \times आ^{२}$

$= [(अ + आ)^{२} - २अ \times आ] - २^{२}अ^{२} \times आ^{२}$

$= [त^{२} - २थ]^{२} - २थ^{२}$

$= त^{४} - ४त^{२}थ + ४थ^{२} - २थ^{२}$

$= त^{४} - ४त^{२}थ + २थ^{२}$

उदाहरण २— $कय^{२} + खय + ग = ०$ या द्विघात समीकारांचीं अ आणि आ हीं मूळें असल्यास $(अ^{२} + आ^{२})$, $(अ^{-२} + आ^{-२})$ हीं दोन मूळें असणारा समीकार काढा.

अ आणि आ हीं $कय^{२} + खय + ग = ०$ चीं मूळें असल्यामुळे

$$अ + आ = -\frac{ख}{क}$$

$$अ \times आ = \frac{ग}{क}$$

इष्ट समीकाराच्या मूळांचा योग

$$=(अ^2+आ^2)+\left(\frac{1}{अ^2}+\frac{1}{आ^2}\right)$$

$$=अ^2+आ^2+\frac{अ^2+आ^2}{अ^2\times आ^2}$$

$$=\frac{(अ^2+आ^2)(1+अ^2आ^2)}{अ^2\times आ^2}$$

$$=\frac{[(अ+आ)^2-2अ\times आ][1+अ^2आ^2]}{अ^2\times आ^2}$$

(अ + आ) आणि अ × आ यांच्या क. ख, ग यांच्या पदांतील अर्हांचा आदेश करून इष्ट समीकाराच्या मूळांचा योग

$$=\frac{\left(\frac{ख^2}{क^2}-2\frac{ग}{क}\right)\left(1-\frac{ग^2}{क^2}\right)}{\frac{ग^2}{क^2}}$$

$$=\frac{(ख^2-2कग)(क^2+ग^2)}{क^2ग^2}$$

इष्ट समीकारांच्या मूळांचा गुणाकार

$$=(अ^2+आ^2)\left(\frac{1}{अ^2}+\frac{1}{आ^2}\right)$$

$$=\frac{(अ^2+आ^2)^2}{अ^2\times आ^2}$$

$$=\frac{[(अ+आ)^2-2अ\times आ]^2}{अ^2\times आ^2}$$

$$=\frac{\left[\frac{ख^2}{क^2}-2\frac{ग}{क}\right]^2}{\frac{ग^2}{क^2}}$$

$$=\frac{(ख^2-2कग)^2}{क^2ग^2}$$

म्हणून इष्ट समीकार

$$य^2-\frac{(ख^2-2कग)(क^2+ग^2)}{क^2ग^2}य$$

$$+\frac{(ख^2-2कग)^2}{क^2ग^2}=0$$

किंवा $क^2ग^2य^2-(ख^2-2कग)(क^2+ग^2)य$

$$+(ख^2-2कग)^2=0$$

७.६१ $कय^2+खय+ग=0$ या समीकाराचीं मूळें

(१) महत्त्वांत समान परंतु चिन्हांत विरुद्ध किंवा

(२) परस्पराशीं व्युत्क्रम किंवा

(३) एक दुसऱ्याच्या म–पट असण्याकरिता लागणारे प्रतिबंध ठरविणें,

समजा, अ आणि आ हीं दिलेल्या समीकाराचीं मूळें आहेत.

तर $अ+आ=-\frac{ख}{क}$

$$अ \times आ = \frac{ग}{क}$$

आता,

(१) दिलेल्या समीकाराचीं मूळ महत्त्वत समान परंतु चिह्नांत विरुद्ध असल्यास

$$अ = -आ \text{ म्हणजे } अ + आ = ०$$

$$\text{म्हणून } -\frac{ख}{क} = ०$$

$$\text{किंवा } ख = ०$$

यावरून ख शून्य असेल तर $कय^{२} + खय + ग = ०$ या समीकाराचीं मूळें महत्त्वांत समान पण चिह्नांत विरुद्ध असतात.

(२) दिलेल्या समीकाराचीं मूळें परस्पराशीं व्युत्क्रम असल्यास

$$अ = \frac{१}{आ} \text{ म्हणजेच } अ \times आ = १$$

$$\text{म्हणून } \frac{ग}{क} = १$$

$$\text{किंवा } ग = क$$

यावरून जर ग = क असेल तर समीकाराचीं मूळें परस्पराशीं व्युत्क्रम असतात.

(३) दिलेल्या समीकाराचें एक मूळ दुसऱ्याच्या म-पट असल्यास

$$आ = म \times अ$$

$$\text{म्हणून } अ + आ = अ + म \times अ$$

म्हणून $अ (१ + म) = -\frac{ख}{क}$ ........................(१)

आणि $अ \times आ = अ \times मअ$

म्हणून $मअ^{२} = \frac{ग}{क}$ ........................(२)

(१) आणि (२) या फलांतून अ चें निरसन केल्यास इष्ट प्रतिबंध मिळतो.

$$अ (१ + म) = -\frac{ख}{क}$$

$$अ^{२} (१ + म)^{२} = \frac{ख^{२}}{क^{२}}$$

म्हणून $\frac{(१ + म)^{२} ग}{क \times म} = \frac{ख^{२}}{क^{२}}$ $\left[\because अ^{२} = \frac{ग}{कम}\right.$

किंवा $मख^{२} = कग (१ + म)^{२}$ हा इष्ट प्रतिबंध आहे.

## प्रश्नसंग्रह ९

(१) खालील समीकारांच्या मूळांचें स्वरूप ठरवा आणि तीं काढा.

(१) $य^{२} - ४य - ३ = ०$

(२) $य^{२} - २य - २ = ०$

(३) $य^{२} - १४य + ४९ = ०$

(४) $य^2 - २र + १० = ०$

(२) खाली दिलेलीं मूळें असणारे समीकार काढा.

(१) ५,७ (२) −३,४ (३) −३, −५ (४) $१ \pm \sqrt{२}$

(५) $-२ \pm \sqrt{३}$ (६) $३ \pm ५श$ (७) $-३ \pm २श$

(८) $-क \pm २\sqrt{२ख}$

(३) $य^2 - २(५ + २म)य + ३ \quad (७ + १०म) = ०$ चीं मूळें

(१) समान असल्यास

किंवा (२) व्युत्क्रम असल्यास

किंवा (३) समान महत्त्वेचीं परंतु विरुद्ध चिह्नांचीं असल्यास म च्या अहीं ठरवा.

(४) $(क^2म^2 + ख^2)य^2 + २मगक^2य + क^2(ग^2 - ख^2) = ०$ या समीकाराचीं मूळें समान असल्यास

$$ग = \sqrt{क^2म^2 + ख^2}$$ हें दाखवा.

(५) $य^2 - तय + थ^2 = ०$ या समीकाराचीं मूळें वास्तविक असल्यास त ला $-२थ$ आणि $+२थ$ यांच्यामध्ये कोणतीच अहीं राहूं शकत नाहीं हें दाखवा.

(६) $य^2 + तय + थ = ०$ या समीकाराचें एक मूळ दुसऱ्याच्या वर्गासमान आहे तर

$$त^3 - थ\,(३त - १) + थ^2 = ०$$ हें दाखवा

[पाटणा १९३९

(७) जर $कय^2 + खय + ग = ०$ या समीकाराच्या मूळांचीं निष्पत्ति न असेल तर

$$कगत^2 + (२कग - ख^2)त + कग = ०$$ हें दाखवा.

(८) जर $कय^2 + खय + ग = ०$ च्या मूळांची निष्पत्ति $क_1य^2 + ख_1य + ग_1 = ०$ या समीकाराच्या मूळांच्या निष्पत्तीसमान असेल तर

$$\frac{ख^2 ग_1}{क} = \frac{ख_1^2 ग}{क_1}$$ हें दाखवा.

(९) $कय^2 + खय + ग = ०$ या समीकाराचीं मूळें (१) दोन्ही धन, (२) एक धन आणि दुसरें ऋण असून महत्तंत धन मूळापेक्षा अधिक असण्याकरितां प्रतिबंध काढा.

(१०) $य^2 - १०य + १ = ०$ या समीकारांच्या मूळांचा योग, वियोग आणि गुणाकार काढा.

(११) जर $कय^2 + खय + ग = ०$ चें एक मूळ दुसऱ्याच्या तिप्पट असल तर $३ख^2 = १६कग$ आहे हें दाखवा.

(१२) जर $कय^2 + खय + ग = ०$ चीं अ आणि आ हीं मूळें असतील तर

(१) $अ^4 + आ^4$ (२) $\frac{अ^3}{आ} + \frac{आ^3}{अ}$

आणि (३) $अ^4 आ^5 + अ^5 आ^4$ यांच्या अर्हा काढा.

(१३) $य^2 + मय + म^2 + न^2 = ०$ चीं मूळें अ आणि आ असल्यास दाखवा की

(१) $अ^2 + अआ + आ^2 = - न^2$ आणि

(२) $अ^4 + अ^2 आ^2 + आ^4 = न^2 [२म^2 + ३न^2]$

[मुंबई १८९०

(१४) $य^2 - नय + थ^2 = ०$ या समीकाराचीं अ आणि आ मूळें असल्यास

(१) $\frac{१}{अ^३}+\frac{१}{आ^३}$ (२) $\frac{अ}{आ^३}-\frac{आ}{अ^३}$ आणि

(३) $\frac{अ^२}{आ^५}-\frac{आ^२}{अ^५}$ यांच्या अर्हा काढा.

(१५) जर $य^२-य+१=०$ या समीकाराचीं अ आणि आ हीं मूळें असतील तर $\frac{१+अ}{आ}$ आणि $\frac{१+आ}{अ}$ हीं मूळें असणारा समीकार काढा.

(१६) $य^२+य+१=०$ या समीकाराचीं मूळें अ आणि आ हीं असल्यास

$\frac{१+अ}{१-अ}$ आणि $\frac{१+आ}{१-आ}$ हीं मूळें असणारा समीकार काढा.

(१७) $कय^२+खय+ग=०$ या समीकाराचीं अ आणि आ हीं मूळें असल्यास

(१) $\frac{१}{अ+आ}$, $\frac{१}{अ}+\frac{१}{आ}$

किंवा (२) $(अ+आ)^२$, $(अ-आ)^२$ हीं मूळें असणारे समीकार काढा.

(१८) $य^२-तय+थ=०$ चीं अ आणि आ हीं मूळें असल्यास

(१) $\frac{अ}{आ}, \frac{आ}{अ}$ किंवा (२) $\frac{२}{अ}, \frac{२}{आ}$ किंवा (३) $\frac{१}{अ^३}, \frac{१}{आ^३}$

किंवा (४) $अ + \frac{१}{आ}$, $आ + \frac{१}{अ}$

ही मूळें असणारे समीकार काढा.

(१९) $य^२ - (१ + त^२) य + \frac{१}{२} (१ + त^२ + त^४) = ०$

या समीकाराचीं अ आणि आ हीं मूळें असल्यास

$अ^२ + आ^२ = त^२$ हें सिद्ध करा.

[कलकत्ता १९०९

(२०) जर ओ हें एक चें संकर घनमूळ असेल तर

$(१ - ओ)(१ - ओ^२)(१ - ओ^४)(१ - ओ^५) = ९$

[पाटणा १९३९

७.७ त्रिपदसंहतीच्या अर्हत परिवर्तन—

क, ख, आणि ग वास्तविक असल्यास य च्या सर्व वास्तविक अर्हांकरिता $कय^२ + खय + ग$ या पदसंहतीची अर्हा वास्तविक असते. उलट ह्या पदसंहतीची कोणतीहि एक अर्हा असण्याकरितां य ची अर्हा नेहमी वास्तविकच असेल असें नाही.

य ला वास्तविक अर्हा दिल्यास

$कय^२ + खय + ग$ च्या संभाव्य अर्हा खालील पद्धतीने काढतां येतात.

समजा $कय^२ + खय + ग = र$

आता, य ला केवळ वास्तविक अर्हा दिल्यामुळे

$कय^२ + खय + ग - र = ०$ चीं मूळेंहि वास्तविक असाव-

यास पाहिजेत. यासाठी समीकाराचा विवेचकहि घन असावयास पाहिजे.

म्हणजेच $ख^2 - ४क(ग - र)$ घन असावयास पाहिजे.

या प्रतिबंधाने र च्या अर्हांच्या सीमा निश्चित होतात.

खाली सोडविलेल्या उदाहरणाचें नीट निरीक्षण करा.

उदाहरण—

य च्या वास्तविक अर्हांकरिता $\frac{य^2 - य + १}{य^2 + य + १}$ ही राशि ३ आणि $\frac{१}{३}$ यांच्यामध्ये आहे हें दाखवा.

समजा,

$$\frac{य^2 - य + १}{य^2 + य + १} = र$$

$$तर\ य^2 - य + १ = र(य^2 + य + १)$$

$$म्हणून\ य^2(१ - र) - य(१ + र) + १ - र = ०$$

य च्या अर्हा वास्तविक आहेत म्हणून या समीकाराची मूळें सुद्धा वास्तविक असावयास पाहिजेत. म्हणून त्याचा विवेचक घन असावयास पाहिजे.

म्हणजेच $(१ + र)^2 - ४(१ - र)^2$ घन असावयास पाहिजे

अर्थात् $१ + २र + र^2 - ४(१ - २र + र^2)$ घन असावयास पाहिजे

किंवा $३र^2 - १०र + ३$ ऋण असावयास पाहिजे

किंवा $(३र - १)(र - ३)$ ऋण असावयास पाहिजे

जर (१) ३र – १ धन आणि र – ३ ऋण

किंवा

(२) ३र – १ ऋण आणि र – ३ धन असेल तरच र कडून वरील प्रतिबंध पाळला जाईल.

(१) ३र – १ धन आणि र – ३ ऋण घेतल्यास

३र – १ धन असावयास पाहिजे

$\therefore$ ३ र $>$ १

किंवा र $> \frac{१}{३}$ म्हणून र $\not< \frac{१}{३}$ .............. (अ

आणि र – ३ ऋण असावयास पाहिजे

र $<$ ३ म्हणून र $\not>$ ३.................... (आ)

म्हणून $\frac{१}{३} <$ र $<$ ३ *या र च्या मर्यादांकरिता (अ) आणि*

(आ) हे प्रतिबंध एकाच वेळीं पाळले जातात.

(२) (३र – १) ऋण आणि (र – ३) धन घेतल्यास

(३र – १) $<$ ०

म्हणून र $< \frac{१}{३}$

आणि (र – ३) धन असायवास पाहिजे.

म्हणून र $>$ ३

आता $र < \frac{१}{३}$ या असमतेतील र च्या कोणत्याहि अर्हेने $र > ३$ ही असमता शक्य होत नाही म्हणून हा प्रकार असंभाव्य आहे.

म्हणून पहिल्या प्रकारावरून

$\frac{य^२ - य + १}{य^२ + य + १}$ ही राशि ३ आणि $\frac{१}{३}$ यांच्या मध्ये राहते.

७८ त्रिपदसंहतीच्या चिह्नांत परिवर्तन— य ला सर्व वास्तविक अर्हा दिल्यास $कय^२ + खय + ग$ ह्या पदसंहतीचें चिह्न, जेव्हा $कय^२ + खय + ग = ०$ ह्या समीकाराचीं मूळें वास्तविक आणि भिन्न असतात आणि य ची अर्हा या दोन मूळांमध्ये असतें तेव्हा, क च्या चिह्नाविरुद्ध असते. इतर सर्व अर्हांकरिता $कय^२ + खय + ग$ ह्या पदसंहतीचें चिह्न-प्रमाणें असतें.

प्रकार १ ला— समजा, $कय^२ + खय + ग = ०$ या समीकाराचीं मूळें वास्तविक आणि भिन्न आहेत. तीं अ आणि आ घेतल्यास अ, आ पेक्षा मोठें आहे असें समजा.

आता, $कय^२ + खय + ग$

$$= क\left[य^२ + \frac{ख}{क}य + \frac{ग}{क}\right]$$

$$= क\ [य^२ - (अ + आ)\ य + अ \times आ]$$

$$= क\ [य - अ]\ [य - आ]$$

जर य अ पेक्षा मोठा असेल तर (य – अ) आणि (य – आ) हे दोन्ही अवयव धन होतात आणि य आ पेक्षा लहान असेल तर (य – अ) आणि (य – आ) हे दोन्ही अवयव ऋण होतात.

दोन्ही प्रकारांत (य – अ) (य – आ) हा गुणाकार धनच होतो म्हणून या प्रकारांत क(य – अ) (य – आ) चें चिह्न क प्रमाणेंच राहतें.

अर्थात् य अ पेक्षा अधिक किंवा आ पेक्षा लहान असतो, म्हणजेच य जेव्हा अ आणि आ या दोन वास्तविक राशींच्या मध्ये नसतो तेव्हा कय$^{२}$+खय+ग या पदसंहतीचें चिह्न क च्या चिह्नाप्रमाणें असतें.

समजा य च्या अर्हा अ आणि आ यांच्यामध्ये आहेत अर्थात अ > य > आ

या प्रकारांत (य – अ) हा अवयव ऋण आणि (य – आ) हा अवयव धन होतो म्हणून

(य – अ) (य – आ) हा गुणाकार ऋण होतो.

म्हणून क (य – अ) (य – आ) चें चिह्न क च्या चिह्नाविरुद्ध असतें.

म्हणजेच अ>य>आ असल्यास कय$^{२}$+खय+ग या पदसंहतीचें चिह्न क च्या चिह्नाविरुद्ध असतें.

प्रकार २ रा—

समजा कय$^{२}$+खय+ग=० या पदसंहतीचीं मूळें वास्तविक आणि समान आहेत. अर्थात् अ=आ.

आता कय$^{२}$ + खय + ग = क (य – अ) (य – आ) = क(य – अ)$^{२}$

$(य-अ)^2$ चें चिह्न य च्या वास्तविक अर्हांकरिता सदैव धनच असतें.

म्हणून $कय^2+खय+ग$ या पदसंहतीचें चिह्न क च्या चिह्नाप्रमाणेच असतें.

प्रकार ३ रा—

समजा $कय^2+खय+ग=०$ या समीकाराचीं मूळें संकर आहेत.

तेव्हा, $ख^2-४कग$ ऋण असावयास पाहिजे.

आता $कय^2+खय+ग=क\left[य^2+\frac{ख}{क}य+\frac{ग}{क}\right]$

$$=क\left[\left(य+\frac{ख}{२क}\right)^2+\frac{ग}{क}-\frac{ख^2}{४क^2}\right]$$

$$=क\left[\left(य+\frac{ख}{२क}\right)^2+\frac{४कग-ख^2}{४क^2}\right]$$

$(ख^2-४कग)$ ऋण असल्यामुळे, अर्थात् $(४कग-ख^2$ धन असल्यामुळे $\frac{४कग-ख^2}{४क^2}$ धन होते.

म्हणून य च्या सर्व वास्तविक अर्हांकरिता

$\left[\left(य+\frac{ख}{२क}\right)^2+\frac{४कग-ख^2}{४कग^2}\right]$ ही पदसंहति धन राहते

म्हणून $कय^2+खय+ग$ या पदसंहतीचें चिह्न क च्या चिह्नाप्रमाणे असतें.

टीप— शेवटच्या दोन प्रकारांवरून असा निष्कर्ष काढता

येतो की $ख^2 - ४कग$ हें ऋण किंवा शून्य असल्यास— अर्थात् $कय^2 + खय + ग = ०$ या समीकाराचीं मूळें संकर किंवा वास्तविक आणि समान असल्यास— $कय^2 + खय + ग$ या पदसंहतीचें चिह्न क च्या चिह्नाप्रमाणेच असतें.

७.८१ जर अ आणि आ हीं $कय^2 + खय + ग = ०$ चीं मूळें असतील तर $कय^2 + खय + ग$ ही पदसंहति $क(य - अ)(य - आ)$ या रूपांत व्यक्त करतां येते, हें आपण पाहिलेंच आहे.

आता, $कय^2 + खय + ग = ०$ ची मूळें (१) वास्तविक आणि भिन्न (२) वास्तविक आणि समान किंवा (३) संकर जशी असतील तदनुसार $कय^2 + खय + ग$ या पदसंहतीचे अवयव (१) वास्तविक आणि भिन्न (२) वास्तविक आणि समान किंवा (३) संकर असतात.

(१) जर $ख^2 > ४कग$ असेल तर $कय^2 + खय + ग$ या पदसंहतीचे वास्तविक आणि भिन्न अवयव पडतात.

(२) जर $ख^2 = ४कग$ असेल तर $कय^2 + खय + ग$ पदसंहतीचे वास्तविक आणि समान अवयव पडतात. म्हणजेच $कय^2 + खय + ग$ ही पदसंहति पूर्ण वर्ग आहे.

आणि (३) जर $ख^2 < ४कग$ असेल तर $कय^2 + खय + ग$ ह्या पदसंहतीचे वास्तविक रेखीय अवयव पडूं शकत नाहीत.

७.९ य आणि र यांच्या द्विघाती थिताचे दोन रेखीय अवयव पडण्याकरिता लागणारा प्रतिबंध.

$कय^2 + 2जयर + खर^2 + 2छय + 2चर + ग$ ही पदसंहति य आणि र यांच्या द्विघाती स्थिताचें सामान्य रूप आहे.

या पदसंहतीची य च्या अवरोही घातांत पुनर्रचना करा म्हणजे

$$कय^2 + य\ (जर+छ) + खर^2 + 2चर + ग$$

$$= \frac{1}{क}\left[क^2य^2 + 2कय(जर+छ) + कखर^2 + 2कचर + कग\right]$$

पहिल्या दोन पदांची वर्गपूर्ति होण्यास लागणारी राशी मिळवा आणि उणें करा, म्हणजे दिलेली पदसंहति

$$= \frac{1}{क}\left[(कय + जर + छ)^2 - (जर + छ)^2 + कखर^2 + 2कचर + कग\right]$$

$$= \frac{1}{क}\left[(कय + जर + छ)^2 - \left\{र^2(ज^2 - कख) + 2र\ (जछ - कच) + (छ^2 - कग)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{क}\left[(कय + जर + छ)^2 - \left(\sqrt{र^2(ज^2 - कख) + 2र(जछ - कच) + (छ^2 - कग)}\right)^2\right]$$

कंसांतील राशि दोन वर्ग राशींचा वियोग आहे म्हणून तिचे दोन अवयव पाडतां येतात ते असे

$$\frac{1}{क}\left[(कय + र + छ) \pm \sqrt{र^2\ (ज^2 - कख) + 2र(जछ - कच) + (छ^2 - कग)}\right]$$

हे अवयव रेखीय असण्याकरिता करणीगत राशि संपूर्ण वर्ग असावयास पाहिजे. त्याकरिता इष्ट प्रतिबंध— (७.८) वरून

$$४(\text{जछ} - \text{कच})^{२} - ४(\text{ज}^{२} - \text{कख})(\text{छ}^{२} - \text{कग}) = ०$$

याला सरळरूप देऊन

$$\text{कखग} + २\text{चछज} - \text{कच}^{२} - \text{खछ}^{२} - \text{गज}^{२} = ०$$

हा प्रतिबंध करणीगत पदसंहतीतील गुणकांनी पाळल्यास आपोआपच य आणि र च्या द्विघात श्रिताचे दोन रेखीय अवयव पडतात.

म्हणून द्विघात श्रिताचे दोन रेखीय अवयव पडण्याकरिता इष्ट प्रतिबंध

$\text{कखग} + २\text{चछज} - \text{कच}^{२} - \text{खक}^{२} - \text{गज}^{२} = ०$ हा आहे.

७.९१ एक अव्यक्त असणाऱ्या समीकारांना एक साधारण मूळ असण्याकरिता इष्ट प्रतिबंध—

समजा $\text{कय}^{२} + \text{खय} + \text{ग} = ०$

$\text{क}_{१}\text{य}^{२} + \text{ख}_{१}\text{य} + \text{ग}_{१} = ०$

ह्या दोन द्विघात समीकारांचें अ हें साधारण मूळ आहे.

तेव्हा $\text{कअ}^{२} + \text{खअ} + \text{ग} = ०$

आणि $\text{क}_{१}\text{अ}^{२} + \text{ख}_{१}\text{अ} + \text{ग}_{१} = ०$

तिर्यक् गुणनानें

$$\frac{\text{अ}^{२}}{\text{खग}_{१} - \text{ख}_{१}\text{ग}} = \frac{\text{अ}}{\text{गक}_{१} - \text{ग}_{१}\text{क}} = \frac{१}{\text{कख}_{१} - \text{क}_{१}\text{ख}}$$

दुसऱ्याचा वर्ग पहिल्या आणि तिसऱ्याच्या गुणाकारासमान होतो ही समता मांडल्यास अ चें निरसन होतें.

$$\therefore \frac{अ^2}{(गक_1 - ग_1 क)^2} = \frac{अ^2}{(खग_1 - ख_1 ग)(कख_1 - क_1 ख)}$$

यावरून इष्ट प्रतिबंध—

$$(खग_1 - ख_1 ग)(कख_1 - क_1 ख) = (गक_1 - ग_1 क)^2$$

## प्रश्नसंग्रह १०

(१) $६ य^2 - य - ४०$ ही पदसंहति घन असल्यास य च्या अर्हा काढा.

(२) य च्या कोणत्या अर्हांमुळे

$$\frac{(य-३)(४य^2-४य+१)}{(य+२)(य^2-३य+३)}$$ ही पदसंहति घन होईल ?

(३) य च्या सर्व वास्तविक अर्हांकरिता $\frac{य^2+३}{य+१}$ ची अर्हा २ आणि −६ यांच्यामध्ये राहूं शकत नाही हे सिद्ध करा.

(४) य सर्व वास्तविक अर्हांकरिता $\frac{य^2+१}{य^2+३य+१}$ ची अर्हा

$-२$ आणि $\frac{२}{५}$ यांच्या मध्ये राहू शकत नाही हें सिद्ध करा.

(५) य च्या सर्व वास्तविक अर्हांकरिता

$\frac{य^२ - २य + ४}{य^२ + २य + ४}$ ची अर्हा ३ आणि $\frac{१}{३}$ यांच्या मध्ये असते हें दाखवा.

(६) जर य वास्तविक असेल तर

$\frac{२य^२ + ४य - ५}{य^२ + २य + ३}$ ची अर्हा $-\frac{७}{२}$ आणि २ यांच्यामध्ये राहते हें दाखवा.

(७) य वास्तविक असेल तर $\frac{३य^२ + ४य + २}{य^२ + ४य + २}$ ची अर्हा $-१$ आणि $+१$ यांच्या मध्ये राहत नाही हें सिद्ध करा.

[नागपूर १९३९

(८) जर य वास्तविक असेल तर $\frac{५य^२ - २य + ३}{२य^२ - २य + १}$ च्या सीमा काढा.

[नागपुर १९३८

(९) जर य वास्तविक असेल तर

$\frac{य^२ + ३४य - ७१}{य^२ + २य - ७}$ ची अर्हा ५ आणि ९ यांच्या मध्ये राहू शकत नाही.

[मद्रास १९३५

(१०) य च्या सर्व वास्तविक अर्हांकरिता $\frac{य^२ - ३य + ४}{य^२ + ३य + ४}$ ची अर्हा ७ आणि $\frac{१}{७}$ यांच्यामध्ये राहते हें सिद्ध करा.
[कलकत्ता १९४०

(११) जर त>१ तर $\frac{य^२ - य}{१ - तय}$ ची अर्हा सदैव वास्तविक असेल हें दाखवा.

(१२) य च्या सर्व वास्तविक अर्हांकरिता $\frac{(य - १)\,(य + ३)}{(य - २)\,(य + ४)}$ ची अर्हा $\frac{४}{९}$ आणि १ यांच्यामध्ये राहत नाही हें दाखवा.

(१३) जर क, ख आणि ग अवरोही किंवा आरोही क्रमांत असतील तर य च्या वास्तविक अर्हांकरिता $\frac{(य - क)\,(य - ग)}{(य - ख)}$ ला सर्व अर्हा धारण करतां येतात हें दाखवा.

(१४) खालील पदसंहतींचे दोन रेखीय अवयव पडत असतील तर त्यांतील त च्या अर्हा काढा.

(१) $२य^२ + यर - र^२ + तय + ६र - ९$

(२) $१२य^२ + ७यर - तर^२ + १३य + ४५र - ३५$

(३) $१२य^२ - १०यर + २र^२ + ११य - ५र + त$

[मद्रास १९३९

(१५) जर $३य^2 + ४ मय + २ = ०$ आणि
$२य^2 + ३य - २ = ०$ या समीकारांना साधारण मूळ असेल तर म ची अहां निश्चित करा.

[कलकत्ता १९३४

(१६) $कय^2 + खय + ग = ०$ आणि $क_1 य^2 + ख_1 य + ग_1 = ०$ या समीकारांना एक साधारण मूळ आहे.

$\frac{क}{क_1}, \frac{ख}{ख_1}, \frac{ग}{ग_1}$ समांतर श्रेढींत असतील तर

$क_1, ख_1, ग_1$ गुणोत्तर श्रेढींत आहेत हें सिद्ध करा.

(१७) $य^2 + तय + थ = ०$ आणि $य^2 + त_1 य + थ_1 = ०$ या समीकारांना एक साधारण मूळ असल्यास तें एकतर

$\frac{तथ_1 - त_1 थ}{थ - थ_1}$ किंवा $\frac{थ - थ_1}{त - त_1}$ आहे हें दाखवा.

[कलकत्ता १९११

(१८) जर $य^2 + खय + कग = ०$ आणि $य^2 + गय + कख = ०$ यांना एक साधारण मूळ असल तर त्यांच्या उरलेल्या मूळांनी $य^2 + कय + खग = ०$ ह्या समीकाराचें समाधान होतें, हें सिद्ध करा. [कलकत्ता १८९२

(१९) जर $कय^2 + २खय + ग = ०$ आणि
$क_1 य^2 + २ख_1 य + ग_1 = ०$ या समीकारांना एक मूळ साधारण असेल तर $(ख^2 + कग)य^2 +$
$(२खख_1 - कग_1 - गक_1)य + ख_1^2 - क_1 ग_1 = ०$ या समीकारांची मूळें समान असतात, हें सिद्ध करा.

(२०) जर $कय^{२}+२खय=ग=०$ या समीकाराचीं मूळें अ आणि आ; आणि $क_{१}य^{२}+ख_{१}य+ग_{१}=०$ या समीकाराचीं मूळें (अ + इ) आणि (आ + इ) हीं असतील तर

$$\frac{ख^{२}-कग}{क^{२}}=\frac{ख_{१}^{२}-क_{१}ग_{१}}{क_{१}^{२}}$$ . हें दाखवा.

[कलकत्ता १९१२

(२१) $य^{२}+६य+क$ आणि $य^{२}+१२य+३क$ यांना एक साधारण अवयव असेल तर क ची अर्हा निश्चित करा.

(२२) $र-मय$ आणि $मर+य$ हे क्रमशः $कय^{२}+२जयर+खर^{२}$ आणि $क_{१}य^{२}+२ज_{१}यर+ख_{१}र^{२}$ यांचे अवयव असण्यासाठी लागणारा प्रतिबंध काढा.

# प्रकरण आठवें

## समीकार

भाग पहिला (एक अव्यक्त)

८.१ ज्या समीकारांची साधनरीति द्विघात समीकाराच्या साधनरीतीवर अवलंबून असते अशा समीकाराचाच या अनुच्छेदांत विचार करूं.

प्रथम दिलेला समीकार, $क र^{२} + ख र + ग = ०$ या द्विघात समीकाराच्या रूपांत प्रदर्शित केला जातो. र हा दिलेल्या समीकारांतील अव्यक्त राशीचें श्रित असतो. $क र^{२} + ख र + ग = ०$ हा समीकार सोडवून र च्या ज्या दोन अर्हा येतात त्यांच्यामुळें य मध्ये दोन समीकार प्राप्त होतात. हे समीकार य करिता सोडवून येणाऱ्या अर्हांनी दिलेल्या समीकाराचें समाधान होतें.

योग्य तें परिवर्तन आणि पुनर्रचना यांच्या योगें समीकार कसे सोडविले जातात हें खालील उदाहरणांवरून स्पष्ट होईल.

उदाहरण १— सोडवा—

$$य^{सं} + २ य^{-सं} - ३ = ०$$

दिलेल्या समीकारांत $य^{सं} = र$ ठेवा।

अर्थात् $य^{-सं} = \frac{१}{र}$

या आदेशामुळे दिलेल्या समीकाराचें रूपांतर खालील समीकारांत होतें.

$$र + \frac{२}{र} - ३ = ०$$

किंवा $र^{२} - ३र + २ = ०$

किंवा $(र - १)(र - २) = ०$

अर्थात् $र = २$ अथवा $र = १$

पण $य^{स} = र$

म्हणून $य^{सं} = २$ तसेंच $य^{सं} = १$

म्हणून $य = २^{स}$ तसेंच $य = १$

उदाहरण २— सोडवा —

$$२य^{२} - ३य - ३\sqrt{२य^{२} - ३य + २} + ४ = ०$$

आता, $२य^{२} - ३य - ३\sqrt{२य^{२} - ३य + २} + ४$

$= (२य^{२} - ३य + २) - ३\sqrt{२य^{२} - ३य + २} + २$

$= ०$

यांत $\sqrt{२य^{२} - ३य + २} = र$ ठेवा

या आदेशामुळे रूपांतरित समीकार

$$र^{२} - ३र + २ = ०$$

किंवा $(र - २)(र - १) = ०$

अर्थात् $र = २$ किंवा $र = १$

पण $र = \sqrt{२य^{२} - ३य + २}$

(१) $र = २$ घेतल्यास

$$२य^{२} - ३य + २ = ४$$

किंवा $२य^{२} - ३य - २ = ०$

किंवा $(य - २)(२य + १) = ०$

म्हणून $य = २$ किंवा $य = -\frac{१}{२}$

(२) $र = १$ घेतल्यास वर्ग करून

$$२य^{२} - ३य + २ = १$$

किंवा $२य^{२} - ३य + १ = ०$

किंवा $(२य - १)(य - १) = ०$

म्हणून $य = \frac{१}{२}$ किंवा $य = १$

म्हणून इष्ट मूळें $य = \frac{१}{२}, १, -\frac{१}{२}, २$

उदाहरण ३— सोडवा—

$$(य - १)(य - ३)(य + ४)(य + २) + १६ = ०.$$

आता $(य - ३)(य + ४) = य^{२} + य - १२$

आणि $(य - १)(य + २) = य^{२} + य - २$

योग्य निवड करून दोन दोन अवयवांचा गुणाकार केल्यास दिलेल्या समीकाराचें रूपांतर

$(य^2+य-१२)(य^2+य-२)+१६=०$

आता $य^2+य=र$ ठेवा.

या आदेशामुळें रूपांतरित समीकार

$(र-१२)(र-२)+१६=०$

किंवा $र^2-१४र+४०=०$

किंवा $(र-१०)(र-४)=०$

म्हणून $र=१०$ किंवा $र=४$

पण $र=य^2+य$

म्हणून $य^2+य=१०$ किंवा $य^2+य=४$

आता $य^2+य=१०$ या समीकाराचीं मूळें

$\frac{-१\pm\sqrt{४१}}{२}$ हीं येतात.

आणि $य^2+य=४$ या समीकाराचीं मूळें

$\frac{-१\pm\sqrt{१७}}{२}$ हीं येतात.

म्हणून इष्ट मूळें $\frac{-१\pm\sqrt{४१}}{२}$ आणि $\frac{-१\pm\sqrt{१७}}{२}$

८.११ घातसमीकार [exponential equations]— ज्या समीकारांतील अव्यक्त, एका किंवा अनेक व्यक्त

राशींच्या घातांत आढळतो त्या समीकाराला घात समीकार म्हणतात.

अशा प्रकारचे समीकार कसे सोडवितात हें पुढे सोडवून दाखविलेल्या उदाहरणांवरून स्पष्ट होईल.

उदाहरण १— $३^{२य+१} = ८१ \times ३^{५}$ हा समीकार सोडवा.

आता $३^{२य+१} = ८१ \times ३^{५}$

$= ३^{४} \times ३^{५}$

$= ३^{९}$

दोन्ही पक्षांत आधार तोच असल्यामुळे त्यांचे घातही समान आहेत.

म्हणून $२य + १ = ९$

किंवा $य = ४$

उदाहरण २— सोडवा—

$२^{२य+३} - ५७ = ६५ (२^{य} - १)$

$२^{२य+३} - ५७ = ६५(२^{य} - १)$

म्हणून $२^{२य} \times २^{३} - ५७ + ६५ = ६५ \times २^{य}$

किंवा $८ \times २^{२य} - ६५ \times २^{य} + ८ = ०$

आता $२^{य} = र$ ठेवा

या आदेशामुळे रूपांतरित समीकार

$८र^{२} - ६५र + ८ = ०$

किंवा $(र - ८)(८र - १) = ०$

म्हणून $र = ८$ किंवा $र = \frac{१}{८}$

पण $\quad र = २^{य}$

म्हणून $२^{य} = ८$ किंवा $२^{य} = \frac{१}{८}$

आता $२^{य} = २^{३}$ किंवा $२^{य} = \frac{१}{२^{३}}$

म्हणून $य = ३$ किंवा $य = -३$

८.२ ८.१ या अनुच्छेदांत

$$कय^{२} + खय + ग + त\sqrt{कय^{२} + खय + ग} = थ$$

या प्रकारचा समीकार, यथायोग्य आदेशानें प्रथम करणी-चिन्हाचें निरसन करून सोडविला आहे. परंतु करणी-चिन्हाचें निरसन करण्यापूर्वी त्यांत एखादा साधारण अवयव आहे की काय ह्याचें परीक्षण करणें इष्ट असतें. असा अवयव असल्यास त्यानें संपूर्ण समीकारास सार्धत भागावें म्हणजे समीकाराचें रूप अधिक सरळ होतें.

उदाहरण १— सोडवा—

$$\sqrt{य^{२} - २य - १५} - \sqrt{य^{२} - ७य + १०} = य - ५$$

दिलेला समीकार

$$\sqrt{य^{२} - २य - १५} - \sqrt{य^{२} - ७य + १०} = य - ५$$

$$\sqrt{(य-५)(य+३)} - \sqrt{(य-५)(य-२)} = य - ५$$

असाहि लिहितां येतो. यांतून $\sqrt{य-५}$ हा साधारण अवयव काढून टाकल्यास राहिलेला समीकार

$$\sqrt{य+३}-\sqrt{य-२}=\sqrt{य-५}$$

दोन्ही बाजूंचा वर्ग करून

$$य+३+य-२-२\sqrt{(य+३)(य-२)}=य-५$$

किंवा $य+६=२\sqrt{(य+३)(य-२)}$

पुन्हा वर्ग करून

$$य^२+१२य+३६=४य^२+४य-२४$$

म्हणून $३य^२-८य-६०=०$

अर्थात् $(३य+१०)(य-६)=०$

म्हणून $य=-\frac{१०}{३}$ किंवा $य=६$

आता $\sqrt{य-५}$ हा साधारण काढलेला अवयव शून्या-सम मांडून $य=५$ हेंहि मूळ मिळतें.

आता दिलेल्या समीकारांत $य=-\frac{१०}{३}$ ठेवल्यास त्याचें समाधान होत नाही. म्हणून $-\frac{१०}{३}$ हें समीकाराचें इष्ट मूळ नाही. परंतु $य=५$ किंवा ६ ठेवल्यास समीकाराचें समाधान होतें म्हणून इष्ट मूळें $य=५$; $य=६$

टीप— समीकारांवरील उदाहरणें सोडवितांना कांहीं वेळां करणीचिन्हांचें निरसन करण्याकरितां समीकाराचा वर्ग करावा लागतो. असें करतांना समीकाराचा घात वाढतो

आणि त्यामुळे अव्यक्ताच्या कांही मह्रा अशा येतात की त्यांनी, दिलेल्या समीकाराचें समाधान होत नाही. अर्थात् अशा मह्रा समीकाराचीं मूळें म्हणून ग्राह्य मानतां येत नाहीत. ज्या मह्रा समीकाराचें समाधान करतात त्याच केवळ त्यांचीं मूळें म्हणून ग्राह्य मानतात.

८.३ व्युत्क्रम समीकार (reciprocal equation)

$६य^४ - १७य^३ + २४य^२ - १७य + ६ = ०$

किंवा $४य^५ - १२य^४ + ७य^३ + ७य^२ - १२य + ४ = ०$

या समीकाराचें निरीक्षण करा.

ह्या समीकारांत य ऐवजी $\frac{१}{य}$ लिहिलें आणि नंतर त्यांना सरळ रूप दिलें तर त्यांच्या रूपांत मुळीच परिवर्तन होत नाही, असें दिसून येतें. अशा समीकारांना व्युत्क्रम समीकार म्हणतात.

व्युत्क्रम समीकाराची परिभाषा—ज्या समीकारांत अव्यक्ताऐवजी त्याच्या व्युत्क्रमाचा आदेश केला तर तो अपरिवर्तित राहतो त्याला व्युत्क्रम समीकार म्हणतात.

व्युत्क्रम समीकार सोडविण्याची पद्धति पुढे सोडविलेल्या उदाहरणावरून माहीत होईल.

सोडवा—

$६य^४ - ३५य^३ + ६२य^२ - ३५य + ६ = ०$

$य^२$ हें वाम पक्षांतील गुणकविरहित मध्यपद आहे. त्यानें समीकाराला सार्धंतें भागा म्हणजे

$$६य^२ - ३५य + ६२ - \frac{३५}{य} + \frac{६}{य^२} = ०$$

पदांची पुनर्रचना करून

$$६\left(य^२ + \frac{१}{य^२}\right) - ३५\left(य + \frac{१}{य}\right) + ६२ = ०$$

आता, $य + \frac{१}{य} = र$ ठेवा.

म्हणून $य^२ + \frac{१}{य^२} = \left(य + \frac{१}{य}\right)^२ - २$

$$= र^२ - २$$

$य^२ + \frac{१}{य^२}$ आणि $य + \frac{१}{य}$ यांच्या अर्हा ठेवून

रूपांतरित समीकार

$$६(र^२ - २) - ३५र + ६२ = ०$$

$$६र^२ - १२ - ३५र + ६२ = ०$$

किंवा $६र^२ - ३५र + ५० = ०$

किंवा $(३र - १०)(२र - ५) = ०$

अर्थात् $र = \frac{१०}{३}$ अथवा $र = \frac{५}{२}$

(१) आता $र = \frac{१०}{३}$ घेतल्यास

$$य + \frac{१}{य} = र = \frac{१०}{३}$$

किंवा $३य^{२} - १०य + ३ = ०$

म्हणून $(३य - १)(य - ३) = ०$

अर्थात् $य = \frac{१}{३}$ किंवा $य = ३$

(२) आता $र = \frac{५}{२}$ घेतल्यास

$$य + \frac{१}{य} = र$$

$$= \frac{५}{२}$$

$$२य^{२} - ५य + २ = ०$$

किंवा $(२य - १)(य - २) = ०$

अर्थात् $य = \frac{१}{२}$ किंवा $य = २$

समीकाराचीं इष्ट मूळें $२, \frac{१}{२}, ३, \frac{१}{३}$, हीं आहेत.

य ऐवजी $\frac{१}{य}$ चा आदेश करून समीकाराचें रूप कां बदलत नाहीं हें य च्या वरील अर्हांवरून स्पष्ट होतें.

टीप— समघाती व्युत्क्रम समीकार सोडविण्याची पद्धति वर दिली आहे. आता, व्युत्क्रम समीकाराचा घात

विषम असतो तेव्हा १ अथवा −१ यांपैकी एक समीकाराचे मूळ असते. या मूळाचा संवादी गुणक काढून टाकल्यानंतर शेष समीकार समघाती होतो. नंतर तो वर दिलेल्या पद्धतीने सोडवितां येतो.

८.३१ खालील समीकार व्युत्क्रम नसूनसुद्धा मागील अनुच्छेदांत दिलेल्या पद्धतीने सोडवितां येतो.

उदाहरण— $८य^{४} + ४२य^{३} + २९य^{२} - ४२य + ८ = ०$

$य^{२}$ ने सार्थत भागून नंतर पदांची पुनर्रचना करून

$$८ \left(य^{२} + \frac{१}{य^{२}}\right) + ४२\left(य - \frac{१}{य}\right) + २९ = ०$$

यांत $य - \frac{१}{य} = र$ ठेवा.

$$\text{म्हणजे } य^{२} + \frac{१}{य^{२}} = \left(य - \frac{१}{य}\right)^{२} + २$$

$$= र^{२} + २$$

$\left(य^{२} + \frac{१}{य^{२}}\right)$ आणि $\left(य - \frac{१}{य}\right)$ यांच्या अर्हांचा आदेश

करून रूपांतरित समीकार

$$८(र^{२} + २) + ४२र + २९ = ०$$

$$\text{किंवा } ८र^{२} + ४२र + ४५ = ०$$

$$\text{किंवा } (२र + ३)\ (४र + १५) = ०$$

अर्थात् $र = -\frac{३}{२}$ किंवा $-\frac{१५}{४}$

(१) आता, $र = -\frac{३}{२}$ ही अर्हा घेतल्यास

$$य - \frac{१}{य} = र$$

$$= -\frac{३}{२}$$

किंवा $२य^२ + ३य - २ = ०$

किंवा $(२य - १)(य + २) = ०$

अर्थात् $य = \frac{१}{२}$ किंवा $य = -२$

(२) आता, $र = -\frac{१५}{४}$ ही अर्हा घेतल्यास

$$य - \frac{१}{य} = र$$

$$= -\frac{१५}{४}$$

किंवा $४य^२ + १५य - ४ = ०$

किंवा $(य + ४)(४य - १) = ०$

अर्थात् $य = -४$ किंवा $य = \frac{१}{४}$

म्हणून य च्या इष्ट अर्हा $\frac{१}{२}$, $-२$, $\frac{१}{४}$, $-४$

## प्रश्नसंग्रह ११

खालील संमीकार सोडवा—

(१) $५\sqrt{\frac{३}{\text{य}}}+७\sqrt{\frac{\text{य}}{३}}=२२\frac{२}{३}$

(२) $२\sqrt{\frac{२}{\text{य}}}+\sqrt{\frac{\text{य}}{२}}=३$

(३) $\sqrt{\text{य}+१}+२\sqrt{\frac{१}{\text{य}+१}}=३$

(४) $२^{२\text{य}+८}+१=३२\times२^{\text{य}}$ [नागपूर

(५) $२(\text{य}^२-३\text{य}+१)^२+५(\text{य}^२-३\text{य}+१)+३=०$ [कलकत्ता

(६) $(\text{य}+२)(३\text{य}+१)(\text{य}-१)(३\text{य}+२)=२२४$ [मुंबई

(७) $(\text{य}+४)(\text{य}+७)(\text{य}+८)(\text{य}+११)+२०=०$ [मद्रास १९१२

(८) $(\text{य}+१)(\text{य}+२)(\text{य}+३)(\text{य}+४)=२४$ [मद्रास १९२३

(९) $(\text{य}^२+५\text{य})(\text{य}^२+११\text{य}+२४)=१६$ [मद्रास १९११

(१०) $\sqrt{\text{य}+२}+\sqrt{\text{य}-३}=५$ [पंजाब

(११) $\text{य}^२-\text{य}+३\sqrt{२\text{य}^२-३\text{य}+२}=\frac{\text{य}}{२}+७$

(१२) $\text{य}^{२} + \text{य} + १० \sqrt{\text{य}^{२} + ३\text{य} + १६} = २(२० - \text{य})$

[मद्रास

(१३) $३\text{य} + २ \sqrt{\text{य}^{२} - ३\text{य} + ९} = \text{य}^{२} + ६$ [कलकत्ता

(१४) $\text{य}^{२} + \sqrt{\text{य}^{२} - ५} = ११$

(१५) $\sqrt{\text{य}^{२} + ६\text{य} - ७} - \sqrt{३\text{य}^{२} - ५\text{य} + २} = \text{य} + १$

(१६) $\sqrt{२७\text{य}^{२} + २१\text{य} + ४} + \sqrt{१८\text{य}^{२} - \text{य} - ४} = ९\text{य} + ४$

(१७) $८\text{य}^{४} - ५४\text{य}^{३} + १०१\text{य}^{२} - ५४\text{य} + ८ = ०$

(१८) $१२\text{य}^{४} + २८\text{य}^{३} - ९\text{य}^{२} - २८\text{य} + १२ = ०$

(१९) $१५\text{य}^{४} + १२८\text{य}^{३} + २९०\text{य}^{२} + १२८\text{य} + १५ = ०$

(२०) $१२\text{य}^{५} - १६\text{य}^{४} - ३७\text{य}^{३} + ३७\text{य}^{२} + १६\text{य} - १२ = ०$

## द्वितीय भाग (दोन अव्यक्त)

# युगपत्-समीकार

(simultaneous equations)

८.३ य आणि र यांच्या दोन युगपत् समीकारांपैकी एक एकघाती आणि दुसरा द्विघाती असल्यास एकघाती समीकारांतील एक अव्यक्त दुसऱ्या अव्यक्ताच्या पदांमध्ये व्यक्त करून त्याच्या अर्हेचा द्विघाती समीकारांत आदेश करतात. यामुळे त्या द्विघाती समीकारांत केवळ एकच

अव्यक्त राहतो. हा समीकार सोडवून एका अव्यक्ताच्या अर्हा प्राप्त होतात. त्यांचा एकघाती समीकारांत आदेश करून उरलेल्या अव्यक्ताच्या अर्हा मिळतात.

उदाहरण — सोडवा—

$$५य + २र = १२$$
$$२य^२ + ३यर + र^२ = १५$$ [कलकत्ता १८८८

पहिल्या समीकारावरून, $र = \frac{१२ - ५य}{२}$

दुसऱ्या समीकारांत र च्या या अर्हेचा आदेश करून

$$२य^२ + ३य \times \frac{१२ - ५य}{२} + \left(\frac{१२ - ५य}{२}\right)^२ = १५$$

किंवा $३य^२ - ४८य + ८४ = ०$

किंवा $य^२ - १६य + २८ = ०$

किंवा $(य - १४)(य - २) = ०$

अर्थात् $य = १४$ किंवा $य = २$

पहिल्या समीकारांत $य = २$ ठेवल्यास $र = १$ आणि $य = १४$ ठेवल्यास $र = -२९$

म्हणून $\left.\begin{matrix} य = २ \\ र = १ \end{matrix}\right\}$ किंवा $\left.\begin{matrix} य = १४ \\ र = -२९ \end{matrix}\right\}$

हीं समीकाराचीं इष्ट मूळें होत.

८.४१ समानघात (homogeneous) समीकार

ज्या समीकाराच्या प्रत्येक पदांतील अव्यक्तांच्या घातांचा योग तोच असतो त्या समीकाराला समानघात समीकार म्हणतात.

उदाहरणार्थ— $क_1 य^2 + ख_1 र^2 + ग_1 यर = 0$

$$क_2 य^2 + ख_2 र^2 + ग_2 यर = 0$$

हे समानघात समीकार आहेत.

$$४य^2 - यर + र^2 = १६$$

$$३य^2 - २यर + र^2 = ८$$

अशा प्रकारच्या समीकारांत अचल पदाव्यतिरिक्त इतर प्रत्येक पदांत अव्यक्तांच्या घातांचा योग तोच आहे. म्हणून असे समीकारहि समानघात समीकारांतच मोडतात. ते सोडविण्याची पद्धति पुढील उदाहणावरून समजेल.

उदाहरण— सोडवा—

$य^2 + यर + ४र^2 = ६$ ............................ (१)

$३य^2 + ८र^2 = १४$ ..... ........................(२)

(१) आणि (२) मध्ये र = ठय ठेवा.

म्हणजे (१) चें रूपांतर $य^2 + ठय^2 + ४ठ^2य^2 = ६$

किंवा $य^2(१ + ठ + ४ठ^2) = ६$..........................(३)

(२) चें रूपांतर $३य^2 + ८ठ^2 य^2 = १४$

किंवा $य^2(३ + ८ठ^2) = १४$..........................(४)

(३) ला (४) ने भागून

$$\frac{१ + ठ + ४ठ^2}{३ + ८ठ^2} = \frac{६}{१४} = \frac{३}{७}$$

किंवा $४ठ^२ + ७ठ - २ = ०$

किंवा $(४ठ - १)(ठ + २) = ०$

अर्थात् $ठ = \frac{१}{४}$ किंवा $ठ = -२$

म्हणून $र = \frac{१}{४}य$ किंवा $र = -२य$

आता, (अ)

(२) मध्ये $र = \frac{१}{४}य$ ठेवून

$य^२(३ + \frac{१}{२}) = १४$

किंवा $य = \pm २$

तेव्हा $र = \pm \frac{१}{२}$

आणि (आ)

(२) मध्ये $र = -२य$ ठेवून

$य^२(३ + ३२) = १४$

$य^२ = \frac{२}{५}$

किंवा $य = \mp \sqrt{\frac{२}{५}}$

तेव्हा $र \mp २\sqrt{\frac{२}{५}}$

एकंदरीत, य आणि र यांच्या खालील युग्मांनी समीकाराचें समाधान होतें.

$$\left.\begin{array}{l} य=२ \\ र=\frac{१}{२} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} य=-२ \\ र=-\frac{१}{२} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} य=\frac{\sqrt{१०}}{५} \\ र=-२\frac{\sqrt{१०}}{५} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} य=-\frac{\sqrt{१०}}{५} \\ =२\frac{\sqrt{१०}}{५} \end{array}\right.$$

८.४२ संमितीय (symmetrical) समीकार

ज्या समीकारांतील अव्यक्तांच्या व्यतिहरणामुळे त्याच्या रूपांत परिवर्तन होत नाही त्याला संमितीय समीकार म्हणतात.

खालील समीकार य आणि र यांच्यामध्ये संमितीय आहत.

$$\left.\begin{array}{r} य+र=४ \\ यर=३ \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{r} यर+य+र=२७ \\ \frac{१}{य}+\frac{१}{र}=\frac{१}{२} \end{array}\right\}$$

असे समीकार सोडविण्याकरिता, त्यांतील अव्यक्त दुसऱ्या कोणत्याहि दोन अव्यक्तांच्या क्रमशः योगासमान आणि वियोगासमान घेऊन, दिलेले समीकार नवीन अव्यक्तांत व्यक्त करतात.

उदाहरणार्थ, सोडवा—

$$य^३+र^३=९ \ldots\ldots (१)$$

$$य+र=३ \ldots\ldots (२)$$

$य = प + फ$ आणि $र = प - फ$ ठेवा

(२) वरून, $(प + फ) + (प - फ) = ३$

∴ किंवा $२ प = ३$

किंवा $प = \frac{३}{२}$

आता, $य = \frac{३}{२} + फ$ आणि $र = \frac{३}{२} - फ$ या

बहा (१) मध्ये ठेवा म्हणजे

$$\left(\frac{३}{२} + फ\right)^३ + \left(\frac{३}{२} - फ\right)^३ = ९$$

किंवा $२\left[\left(\frac{३}{२}\right)^३ + \frac{९}{२} फ^२\right] = ९$

किंवा $\frac{२७}{४} + ९फ^२ = ९$

$$३६फ^२ = ९$$

$$फ = \pm\frac{१}{२}$$

(अ) $फ = + \frac{१}{२}$ घेतल्यास

$$य = \frac{३}{२} + \frac{१}{२}$$

$=२$

$र=\frac{३}{२}-\frac{१}{२}$

$=१$

आणि (आ) $फ=-\frac{१}{२}$ घेतल्यास

$य=\frac{३}{२}-\frac{१}{२}$

$=१$

$र=\frac{३}{२}+\frac{१}{२}$

$=२$

म्हणून $\left.\begin{matrix} य=२ \\ र=१ \end{matrix}\right]$ $\left.\begin{matrix} य=१ \\ र=२ \end{matrix}\right]$

८.४२ खालील उदाहरणांत दिलेले समीकार सामितीय नसून सुद्धा ते मागील अनुच्छेदांत दिलेल्या रीतीनेच सोडविता येतात.

उदाहरण— $य^४+र^४=५६$ ..........................(१)

$य-र=२$ ..........................(२)

$य=प+फ$ आणि $र=प-फ$ ठेवा

(२) मध्ये य आणि र यांच्या जहा ठेवून

$२फ=२$

किंवा फ $=१$

तेव्हा $य = प + १$

$र = प - १$

(१) मध्ये य आणि र यांच्या अर्हा ठेवल्यास

$$(प+१)^४ + (प-१)^४ = ५६$$

किंवा $२(प^४ + ६प^२ + १) = ५६$

किंवा $प^४ + ६प^२ - २७ = ०$

किंवा $(प^२ + ९)(प^२ - ३) = ०$

अर्थात् $प = \pm ३\sqrt{-१}$ किंवा $प = \pm \sqrt{३}$

आता $य = प + १$ आणि $र = प - १$ या समीकारांत प च्या अर्हा ठेवून

$$\left.\begin{aligned} य &= ३\sqrt{-१} + १ \\ र &= ३\sqrt{-१} - १ \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} य &= -३\sqrt{-१} + १ \\ र &= -३\sqrt{-१} - १ \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} य &= +\sqrt{३} + १ \\ र &= +\sqrt{३} - १ \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} य &= -\sqrt{३} + १ \\ र &= -\sqrt{३} - १ \end{aligned}\right\}$$

८.५ मागील कांही अनुच्छेदांत प्रमाप समीकार सोडविण्याच्या पद्धति दिल्या आहेत. अशा समीकाराव्यतिरिक्त इतर समीकार सोडवितांना उपयोगांत आणाव्या लागणाऱ्या विविध क्लृप्त्या खालील उदाहरणांवरून निदर्शनास येतील.

उदाहरण १—

सोडवा.

$य^2 + यर + र^2 = २१$ ………………………(१)

$य + \sqrt{यर} + र = ७$ ………………………(२)

आता $य^2 + र^2 + यर = (य + र)^2 - यर$

$= (य + र - \sqrt{यर}) (य + र + \sqrt{यर})$

(१) आणि (२) चा उपयोग करून

$२१ = (य + र - \sqrt{यर})\ ७$

म्हणून $य + र - \sqrt{यर} = ३$ ………………………(३)

(२) आणि (३) यांचा उपयोग करून

$२य + २र = १०$

किंवा $य + र = ५$ ………………………(४)

(४) चा (२) मध्ये उपयोग करून आणि वर्ग करून

$यर = ४$ ………………………(५)

(४) आणि (५) हे समीकार सोडवून

$य = १,\quad र = ४;$ आणि $य = ४,\quad र = १$

उदाहरण २—

$(य + र)^{\frac{२}{३}} + ६\,(य - र)^{\frac{२}{३}} = ५\,(य^2 - र^2)^{\frac{१}{३}}$ ……(१)

$१३य + १८र = ७२$ ………………………(२)

[मद्रास १९००

(१) या समीकारास $(य-र)^{\frac{२}{३}}$ ने भागा म्हणजे

$$\left(\frac{य+र}{य-र}\right)^{\frac{२}{३}}+६=५\left(\frac{य+र}{य-र}\right)^{\frac{१}{३}}$$

या समीकारांत $\left(\frac{य+र}{य-र}\right)^{\frac{१}{३}}=ल$ ठेवा.

या आदेशामुळे रूपांतरित समीकार

$$ल^{२}+६=५ल$$

किंवा $ल^{२}-५ल+६=०$

किंवा $(ल-३)(ल-२)=०$

अर्थात् $ल=२$ किंवा $ल=३$

म्हणून $\frac{य+र}{य-र}=८$ किंवा २७

(अ) $\therefore \frac{य+र}{य-र}=८$ घ्या

म्हणून $७य-९र=०$

किंवा $९र=७य$

$९र=७य$ ही र ची अर्हा (२) मध्ये ठेवून

$$१३य+१४य=७२$$

म्हणून $य=\frac{८}{३}$ आणि $र=\frac{५६}{२७}$

इष्ट मूळें $य=२\frac{२}{३}$ आणि $र=२\frac{२}{२७}$

(आ) $\frac{य+र}{य-र}=२७$

म्हणून $२६य-२८र=०$

किंवा $१३य=१४र$

र ची ही अर्हा (२) मध्ये ठेवून

$१४र+१८र=७२$

किंवा $र=\frac{९}{४}$

आणि $य=\frac{६३}{२६}$

इष्ट मूळें $य=२\frac{११}{२६}$, $र=२\frac{१}{४}$

उदाहरण ३—

$$\frac{य^३+र^३}{(य+र)^२}+\frac{य^३-र^३}{(य-र)^२}=\frac{४३य}{८} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

$$५य-७र=४ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

आता

$$य^३+र^३ \equiv (य+र)^३-३यर(य+र)$$

$$य^३-र^३ \equiv (य-र)^३+३यर(य-र)$$

या ऐकात्म्यांचा उपयोग करून समीकार (१) चें रूपांतर

$$य+र-\frac{३यर}{य+र}+य-र+\frac{३यर}{य-र}=\frac{४३य}{८}$$

$$३यर\left[\frac{१}{य-र}-\frac{१}{य+र}\right]=\frac{४३य}{८}-२य$$

म्हणून $\frac{३यर \times २र}{य^२ - र^२} = \frac{२७य}{८}$

यावरून $य = ०$ किंवा $\frac{२ र^२}{य^२ - र^२} = \frac{९}{८}$

म्हणून $१६र^२ = ९(य^२ - र^२)$

$२५र^२ = ९य^२$

म्हणून $र = \pm\frac{३}{५}य$

(अ) समीकार (२) वरून, $य = ०$ तर $र = -\frac{४}{७}$

(आ) $र = \frac{३}{५} य$

तर $५ य - ७ \times \frac{३}{५} य = ४$

म्हणून $य = ५$ म्हणून $र = ३$

(इ) $र = -\frac{३}{५} य$

तर $५य + ७ \times \frac{३}{५} य = ४$

$२५ य + २१य = २०$

$४६ य = २०$

म्हणून $य = \frac{१०}{२३}$

म्हणून $र = \frac{-६}{२३}$

समीकाराचीं इष्ट मूळें—

$$\left.\begin{array}{l} य = ० \\ र = \frac{-४}{७} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} य = ५ \\ र = ३ \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} य = \frac{१०}{२३} \\ र = \frac{-६}{२३} \end{array}$$

## प्रश्नसंग्रह १२

खालील समीकार सोडवा.

(१) $य + र = ३$
$२य^२ - ५यर + २र^२ = ०$ [कलकत्ता १९२०

(२) $५य + २र = १२$
$२य^२ + ३यर + र^२ = १५$ [कलकत्ता १८८८

(३) $३य + ४र = ५$
$य^२ + र^२ = १$ [कलकत्ता १९२२

(४) $२य + ३र + ४ = ०$
$२य^२ - ३यर + ४र^२ = २४$ [म्हैसूर १९१७

म्हणून $\frac{३यर \times २र}{य^२ - र^२} = \frac{२७य}{८}$

यावरून $य = ०$ किंवा $\frac{२र^२}{य^२ - र^२} = \frac{९}{८}$

म्हणून $१६र^२ = ९(य^२ - र^२)$

$२५र^२ = ९य^२$

म्हणून $र = \pm \frac{३}{५} य$

(अ) समीकार (२) वरून, $य = ०$ तर $र = -\frac{४}{७}$

(आ) $र = \frac{३}{५} य$

तर $५य - ७ \times \frac{३}{५} य = ४$

म्हणून $य = ५$ म्हणून $र = ३$

(इ) $र = -\frac{३}{५} य$

तर $५य + ७ \times \frac{३}{५} य = ४$

$२५य + २१य = २०$

$४६य = २०$

म्हणून $य = \frac{१०}{२३}$

म्हणून $र = \frac{-६}{२३}$

समीकारांचीं इष्ट मूळें—

$$\left.\begin{array}{l} य = ० \\ र = \frac{-४}{७} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} य = ५ \\ र = ३ \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} य = \frac{१०}{२३} \\ र = \frac{-६}{२३} \end{array}$$

## प्रश्नसंग्रह १२

खालील समीकार सोडवा.

(१) $य + र = ३$
$२य^२ - ५यर + २र^२ = ०$ [कलकत्ता १९२०

(२) $५य + २र = १२$
$२य^२ + ३यर + र^२ = १५$ [कलकत्ता १८८८

(३) $३य + ४र = ५$
$य^२ + र^२ = १$ [कलकत्ता १९२२

(४) $२य + ३र + ४ = ०$
$२य^२ - ३यर + ४र^२ = २४$ [म्हैसूर १९१७

(५) $य^२+र^२+य-र=२२$

$य+र=६$ [अलाहाबाद १९१०

(६) $\frac{१}{य}+\frac{१}{र}=\frac{१}{२}$

$य+र=९$ [कलकत्ता १९३६

(७) $य+र=\frac{५}{६}$

$\frac{१}{य}-\frac{१}{र}=१$ [कलकत्ता १९३७

(८) $\sqrt{\frac{य}{र}}+\sqrt{\frac{र}{य}}=\frac{५}{२}$

$य+र=१०$ [कलकत्ता १९३८

(९) $यर+य+र=२७$

$\frac{१}{य}+\frac{१}{र}=\frac{१}{२}$ [कलकत्ता १९३९

(१०) $य+र+\sqrt{(य+२)(र+३)}=३४$

$(य+२)^२+(र+३)^२+(य+२)(र+३)=७४१$ [अलाहाबाद १९२८

(११) $\frac{य^२}{र}+\frac{र^२}{य}=१८$

$य+र=१२$ [कलकत्ता १९१९

(१२) $२य^२+३यर+र^२=२०$

$५य^२+४र^२=४१$ [कलकत्ता १८९२

(१३) $य^{२}+र^{२}+१७=५यर$

$२य^{२}+३र^{२}=३५$ [मद्रास १८२२

(१४) $४य^{२}-यर+र^{२}=१६$

$२य^{२}-२यर+र^{२}=८$ [पंजाब १९१०

(१५) $४य^{२}+३यर+१८र^{२}=२०$

$४य^{२}+यर=१०$ [मद्रास १८९७

(१६) $य^{४}+य^{२}र^{२}+र^{४}=१३३$

$य^{२}-यर+र^{२}=७$ [अलाहाबाद १९०१

(१७) $६य^{२}-५यर-६र^{२}+३य+३र=०$

$१०य^{२}-९यर+२र^{२}-९य-५र-७=०$

[अलाहाबाद १९२६

(१८) $य-र=२$

$य^{४}+र^{४}=८२$

(१९) $य+र=६$

$य^{४}+र^{४}=६२६$

(२०) $य-र=२;\ य^{५}-र^{५}=२४२$

(२१) $य^{३}-र^{३}=२१८\ ;\ य-र=२$ [फलकत्ता १९१७

(२२) $य+\frac{४}{र}=१\ ;\ र\times\frac{४}{य}=२५$ [फलकत्ता १९२०

(२३) $य+यर=३\ ;\ र+यर=४$ [फलकत्ता १९२१

(२४) $य+र+३\sqrt{य+र}=य^{२}+र^{२}=१०$

[नागपुर १९२५

आणि क ची $-१$ ही अर्हा घेतल्यास

$य = -१, \quad र = -१ \quad$ आणि $\quad ल = -२$

८.६२ उदाहरण २— सोडवा—

$$य + र + ल = ६ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

$$य^२ + र^२ + ल^२ = १४ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

$$रल = ६ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

(२) आणि (३) या समीकारांवरून

$$य^२ + र^२ + ल^२ + २रल = १४ + १२$$

म्हणून $य^२ + (र + ल)^२ = २६ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (४)$

आता $(र + ल) = प$ ठेवा म्हणजे

(१) आणि (४) या समीकारांचे रूपांतर

$$य + प = ६$$

आणि $य^२ + प^२ = २६$

आता $य^२ + प^२ = (य + प)^२ - २यप$

म्हणून $२६ = ३६ - २यप$

म्हणून $२यप = १०$

पुन्हा $(य - प)^२ = (य + प)^२ - ४यप$

$= ३६ - २०$

$= १६$

म्हणून $य - प = \pm ४$

आता $य + प = ६$ आणि $य - प = +४$ हे समीकार सोडवा.

म्हणून य = ५   आणि प = १

पुन्हां समीकार (१) मध्ये य च्या अर्हेचा आदेश करून

$$र + ल = ६ - ५$$
$$= १$$

आता $र + ल = १$

आणि $रल = ६$ (समीकार ३)

म्हणून $(र - ल)^२ = (र + ल)^२ - ४रल$

$$= १ - २४$$
$$= -२३$$

$$\therefore \quad र - ल = \pm \sqrt{-२३}$$

हा समीकार $र + ल = १$ या समीकाराच्या साह्याने सोडवून

$$र = \frac{१ \pm \sqrt{-२३}}{२}, \quad ल = \frac{१ \mp \sqrt{-२३}}{२}$$

(आ) आता $य + प = ६$

आणि $य - प = -४$

हे समीकार सोडवा

म्हणजे $य = १$ आणि $प = ५$

य ची ही अर्हा समीकार (१) मध्ये ठेवून

$$र + ल = ५$$

आता $र + ल = ५$

आणि $रल = ६$, (समीकार ३)

म्हणून $(र-ल)^२ = (र+ल)^२ - ४रल$

$= २५ - २४$

$= १$

$र - ल = \pm १$

पण $र + ल = ५$

म्हणून $र - ल = १$ घेतल्यास

$र = ३$ आणि $ल = २$

आणि $र - ल = -१$ घेतल्यास

$र = २$ आणि $ल = ३$,

म्हणून इष्ट मूळें $य = १ \quad र = ३ \quad ल = २$

$य = १ \quad र = २ \quad ल = ३$

$$य = ५,\ र = \frac{१ \pm \sqrt{-२३}}{२}, \quad ल = \frac{१ \mp \sqrt{-२३}}{२}$$

८.७ उदाहरण १— सोडवा—

$य^२ + यर + यल = ८$

$र^२ + रल + रय = ६४$

$ल^२ + लय + लर = -३६$

दिलेले समीकार खालील रूपांत लिहितां येतात.

$य\,(य + र + ल) = ८$ ..................(१)

$र\,(य + र + ल) = ६४$ ..................(२)

$ल\,(य + र + ल) = -३६$ ..................(३)

तिन्ही समीकारांचा योग करून

$$(य+र+ल)^2 = ३६$$

म्हणून $(य+र+ल) = \pm ६$

आता $(य+र+ल)=६$ घेतल्यास क्रमशः समीकार (१), (२) आणि (३) वरून

$$य = \frac{४}{३}, \quad र = \frac{३२}{३}, \quad ल = -६$$

आणि $य+र+ल = -६$ घेतल्यास क्रमशः समीकार (१), (२), आणि (३) वरून

$$य = -\frac{४}{३}$$

$$र = -\frac{३२}{३}$$

$$ल = ६$$

वर सोडविलेलें उदाहरण खालील उदाहरणाचा विशिष्ट प्रकार आहे.

य (टय+ठर+डल) = त ..................... (१)

र (टय+ठर+डल) = थ ..................... (२)

ल (टय+ठर+डल) = द ..................... (३)

(१), (२) आणि (३) या समीकारांना क्रमशः ट, ठ आणि ड यांनी गुणा आणि नंतर त्यांचा योग करा.

म्हणजे $(टय+ठर+डल)^2 = टत+ठथ+डद$

किंवा $टय + ठर + डल = \pm \sqrt{टत + ठथ + डद}$

ह्या समीकारच्या वाम पक्षाची धन अर्हा क्रमशः (१), (२) आणि (३) या समीकारांत ठेवल्यास

$$य = \frac{त}{\sqrt{टत + ठथ + डद}}$$

$$र = \frac{थ}{\sqrt{टत + ठथ + डद}}$$

$$ल = \frac{द}{\sqrt{टत + ठथ + डद}}$$

तसेंच टय + ठर + डल ची ऋण अर्हा क्रमशः (१), (२) आणि (३) या समीकारांत ठेवल्यास

$$य = \frac{-त}{\sqrt{टत + ठथ + डद}}$$

$$र = \frac{-थ}{\sqrt{टत + ठथ + टद}}$$

$$ल = \frac{-द}{\sqrt{टत + ठथ + डद}}$$

८.७१ उदाहरण २— सोडवा—

$(र - ल)(ल + य) = २२$ ........................(१)

$(ल-य)(य-र)=३३$ ........................(२)

$(य-र)(र-ल)=६$ ........................(३)

तिन्ही समीकारांचा गुणाकार करून

$(य-र)^२ (र-ल)^२ (ल+य)^२ = २२ \times ३३ \times ६$

किंवा $(य-र)(र-ल)(ल+य) = \pm ६६$ ............... (४)

समीकार (४) ला क्रमशः (१), (२), (३) या समीकारांनी भागून

$य-र = \pm ३$

$र-ल = \pm २$

$ल+य = \pm ११$

आता (क) $य-र=३$

$र-ल=२$

$ल+य=११$

आणि (ख) $य-र=-३$

$र-ल=२$

$ल+य=-११$

हे युगपत् समीकार सोडवावयाचे आहेत.

(क) या समीकारांची इष्ट मूळें

$य=८, र=५, ल=३$

(ख) या समीकाराची इष्ट मूळें

$य=-८, र=-५, ल=-३$

८.७२ उदाहरण ३— सोडवा—

$य^{२} - रल = ५$ ........................(१)

$र^{२} - यल = ३$ ........................(२)

$ल^{२} - यर = -१$ ........................(३)

(१), (२), आणि (३) या समीकारांना क्रमशः र, ल आणि य यांनी गुणून नंतर त्यांचा योग करा.

म्हणजे $५र + ३ल - य = ०$ ........................(४)

आता (१), (२) आणि (३) या समीकारांना क्रमशः ल, य, आणि र यांनी गुणून नंतर त्यांचा योग करा म्हणजे

$५ल + ३र - र = ०$ ........................(५)

आता (४) आणि (५) या समीकारांची योग्य पुनर्रचना केल्यास

$य - ५र - ३ल = ०$

$३य - र + ५ल = ०$

आता, तिर्यक् गुणनाने

$$\frac{य}{-२} = \frac{र}{-१} = \frac{ल}{१} = क$$

म्हणून $य = -२क$

$र = -क$

$ल = क$

दिलेल्या समीकारांपैकी कोणत्याही एकांत य, र आणि

$४ र^२ + ल^२ - २रल = १३$ ........................(६)

$७ र^२ + ल^२ - ५रल = १९$ ........................ (७)

आता $र = फ \times ल$ ठेवून (६) ला (७) ने भागा

$$\therefore \quad \frac{४फ^२ + १ - २फ}{७फ^२ + १ - ५फ} = \frac{१३}{१९}$$

म्हणून $५फ^२ - ९फ - २ = ०$

म्हणून $फ = २$ किंवा $फ = -\frac{१}{५}$

आता $फ = २$ घ्या म्हणजे

$र = २ ल$

र ची ही अहा (६) मध्ये ठेवून

$ल = \pm १$

$\therefore$ म्हणून $र = \pm २$

आणि $य = \pm ३$

आता, $फ = -\frac{१}{५}$ घेतल्यास

$$ल = \pm \frac{५}{\sqrt{३}}$$

$$र = \mp \frac{१}{\sqrt{३}}$$

आणि $य = \mp \frac{७}{\sqrt{३}}$

म्हणून $य = ३$ $र = २$ $ल = १$

$य = -३$ $र = -२$ $ल = -१$

$य = -\frac{७}{\sqrt{३}}$ $र = -\frac{१}{\sqrt{३}}$ $ल = \frac{५}{\sqrt{३}}$

$य = \frac{७}{\sqrt{३}}$ $र = \frac{१}{\sqrt{३}}$ $ल = -\frac{५}{\sqrt{३}}$

८.८ उदाहरण— सोडवा—

$य+र+ल = २$ ............... (१)

$य^२+र^२+ल^२ = १४$ ............... (२)

$य^३+र^३+ल^३ = २०$ ............... (३)

[अलाहाबाद १९२६

समीकार (१) चा वर्ग करून त्यांतून समीकार (२) उणे करा. म्हणजे

$यर+रल+लय = -५$ ............................ (४)

आता $य^३+र^३+ल^३-३यरल$

$= (य+र-ल)(य^२+र^२+ल^२-यर-रल-लय)$

(१), (२), (३) आणि (४) यांचा वरील समीकारांत उपयोग करून

$२० - ३यरल = २(१४+५)$

म्हणून $३यरल = -१८$

किंवा $यरल = -६$

आता, $य+र+ल = २$ ..................................(१)

(३) $य+र+ल=९$

$य^२+र^२+ल^२=२९$

$यर=६$

(४) $य+र+ल=६$

$य^२+र^२+ल^२=१४$

$रल=६$ [पाटणा १९३९

(५) $य+र+ल=१\frac{१}{१२}$

$$यर+यल+रल=\frac{९}{२४}$$

$$यरल=\frac{१}{२४}$$ [अलाहाबाद १९२५

(६) $य^२+यर+यल=६$

$र^२+रल+रय=१२$

$ल^२+लय+लर=१८$

(७) $रल-र+ल=५$

$लय+ल-य=१०$

$यर+य+र=२५$ [नागपुर १९४१

(८) $यर+य+र=२३$

$यल+य+ल=४१$ [नागपुर १९२५

$रल+र+ल=२७$

(९) $यर+५(य+र)=४७$

$ल^2 - यर = १$ [नागपूर १९३९

(१७) $य^2 - रल = त$

$र^2 - लय = थ$

$ल^2 - यर = द$

(१८) $य(र+ल)=५$

$र(य+ल)=८$

$ल(य+र)=९$ [कलकत्ता १९३८

(१९) जर $\frac{य}{ख+ग-क} = \frac{र}{ग+क-ख} = \frac{ल}{क+ख-ग}$

तर $(क+ख+ग)(रल+लय+यर)$

$= (य+र+ल)(कय+खर+गल)$

हें सिद्ध करा. [पाटणा १९३९

(२०) $यल+र=७ल$

$रल+य=८ल$

$य+र+\overline{ल}=१२$ [कलकत्ता १९३९

(२१) $य+र+ल=०$

$य^2+र^2+ल^2=१४$

$य^3+र^3+ल^3=-१८$ [अलाहाबाद १९२४

(२२) $य+र+ल=६$

$य^2+र^2+ल^2=१४$

$य^3+र^3+ल^3=३६$ [नागपूर १९३८

# प्रकरण नववें

## क्रमचय आणि संचय

## (permutation and combination)

९.१ जी वस्तु मोजतां येते ती अंकगणिती किंवा बीजीय अनुसंधानाचा (investigation) विषय होऊं शकते. वस्तूंचें प्रवरण (selection) आणि विन्यास (arrangements) हाहि अशाचपैकी एक विषय आहे.

ज्या क्रियांत निवडींचा प्रश्न असतो किंवा पर्यायांचें (alternatives) संयोजन (combination) करण्याचा संभव (chance) असतो त्यांना या विषयाचे नियम लागूं होतात.

क, ख, ग या तीन अक्षरांपैकी कोणत्याहि दोन अक्षरांची निवड करा.

आता, (क, ख), (ख, ग) आणि (ग, क) यांची तीन प्रकारें निवड करतां येते म्हणून अशा निवडीचे प्रकार तीन आहेत. यांपैकी एका प्रकारें निवडलेल्या अक्षरांचे परस्परांत निरनिराळे किती विन्यास होऊं शकतात ते आपण पाहूं.

(क, ख) हा समूह घ्या. क आणि ख ह्या दोन अक्षरांचा विन्यास (क, ख) किंवा (ख, क) अशाप्रकारें होतो. याप्रमाणे

क आणि ख या दोन वर्णांचा दोन प्रकारे विन्यास करितां येतो.

जेव्हा वस्तूंच्या रचनेचा आपण विचार करतों तेव्हा त्यांच्या विन्यासाचा जो क्रम असतो त्याला अत्यंत महत्त्व असतें ही गोष्ट लक्षांत ठेवली पाहिजे. परंतु वस्तूंच्या केवळ प्रवरणाचाच (selection) जेव्हा प्रश्न असतो तेव्हा त्यांचा क्रम विचारांत घेण्याची मुळीच आवश्यकता नसते.

कख हा समूह निवडतांना प्रथम क नंतर ख किंवा प्रथम ख नंतर क निवडला तरी त्यांतून प्रवरणाचा एकच प्रकार निष्पन्न होतो. त्याचा (कख) किंवा (खक) ने निर्देश केला जातो.

वस्तूंचे प्रवरण आणि विन्यास ह्यांना गणित विषयांत अनुक्रमें संचय (combination) आणि क्रमचय (permuta-tion) असें म्हणतात.

दिलेल्या वस्तूंपैकी सर्व अथवा कांही वस्तूंचे प्रवरण अथवा समूह यांना संचय असें म्हणतात आणि प्रत्येक संचयांतील वस्तूंच्या विन्यासाला त्यांचा क्रमचय म्हणतात.

९.२ महत्त्वपूर्ण विधान—

एखादी क्रिया जर म प्रकारांनी करतां येत असेल आणि ही, यांपैकी एखाद्या प्रकाराने केल्यानंतर जर दुसरी क्रिया न प्रकारांनी करतां येत असेल तर दोन्ही क्रिया करण्याचे संभाव्य प्रकार म × न असतात.

समजा पहिली क्रिया कोणत्याहि एका प्रकाराने केली तर त्यानंतर दुसरी क्रिया न प्रकारांनी करता येते.

म्हणून पहिली क्रिया करण्याच्या प्रत्येक प्रकारानंतर दुसरी क्रिया करण्याचे न प्रकार आहेत. पण पहिली क्रिया म प्रकारांनी केली जाते म्हणून दोन्ही क्रिया करण्याचे संभाव्य प्रकार म × न आहेत.

उदाहरण— २ पारितोषिके ८ प्रतिस्पर्ध्यांना किती प्रकारांनी देतां येतील ?

पहिलें पारितोषिक ८ जणांपैकी कोणत्याहि एकाला देतां येतें म्हणजेच पहिलें पारितोषिक देण्याचे ८ प्रकार संभवतात.

पण कोणाहि एकाला पहिलें पारितोषिक दिल्यानंतर दुसरें पारितोषिक उरलेल्या ७ जणांपैकी कोणाहि एकाला देतां येतें. म्हणजेच दुसरें पारितोषिक देण्याचे प्रकार ७ आहेत.

आता पहिलें पारितोषिक देण्याच्या प्रत्येक प्रकाराकरिता दुसरें पारितोषिक देण्याचे ७ प्रकार संभवतात.

पण पहिलें पारितोषिक देण्याचे ८ प्रकार आहेत. म्हणून दोन्ही पारितोषिकें देण्याच संभाव्य प्रकार

८ × ७ = ५६

९.३. स विजातीय वस्तूंपैकी प्रत्येक वेळीं न वस्तू घेतल्यास क्रमचयांची संख्या काढणें.

हाच प्रश्न अन्यथा पुढीलप्रमाणे मांडतां येईल.

न रिकाम्या जागा स विजातीय वस्तूंनी किती प्रकारांनी भरतां येतील ?

पहिली जागा भरण्याकरिता हाताशीं (at our disposal) स वस्तू आहत. म्हणून ती जागा स प्रकारांनी

भरतां येते. यांपैकी कोणत्याहि एका प्रकाराने ती जागा भरल्यानंतर दुसरी जागा भरण्याकरितां हातार्शी (स – १) वस्तू आहेत. म्हणून ती जागा (स – १) प्रकारांनी भरतां येते.

पहिली जागा भरून काढण्याच्या प्रत्येक प्रकाराकरितां दुसरी जागा भरुन काढण्याचे (स – १) प्रकार आहेत. पण पहिली जागा भरून काढण्याचे स प्रकार आहेत. म्हणून पहिल्या दोन जागा भरून काढण्याचे एकंदर प्रकार स(स – १) आहेत.

पुन्हा, पहिल्या दोन जागा कोणत्याहि एका प्रकाराने भरल्यानंतर तिसरी जागा भरण्याकरिता हातार्शी (स – २) वस्तू आहेत. म्हणून ती जागा (स – २) प्रकारांनी भरतां येते. पूर्ववत् चर्चा करून, पहिल्या तीन जागा भरून काढण्याचे एकंदर प्रकार स (स – १) (स – २) आहेत.

यावरून प्रत्येक वेळीं अवयवांची संख्या भरलेल्या जागांच्या संख्येसमान असते आणि प्रत्येक अवयव त्याच्या पूर्वगामी अवयवांपेक्षा एक ने कमी असतो हें दिसून येतें. म्हणून न रिकाम्या जागा भरून काढण्याचे एकंदर प्रकार

स (स – १) (स – २) .............. न अवयवांपर्यंत
= स (स – १) (स – २) ..............[स – (न – १)]
= स (स – १) (स – २)..............(स – न + १)

म्हणून स विजातीय वस्तूंपैकी प्रत्येक वेळीं न वस्तू घेतल्यास क्रमचयांची संख्या स(स – १) (स – २).............. (स – न + १) येते. स पैकी सर्वच्या सर्वच वस्तूंच्या

क्रमचयांची संख्या स (स − १) (स − २)......(स − न + १)...
स अवयवांपर्यंत किंवा स (स − १) (स − २)..... ३ × २ × १

आहे. हा गुणाकार सदैव $\underline{|स}$ किंवा स ! असा दर्शविला जातो. आणि याला हृत (factorial) स असें संबोधतात.

९.३१ स वस्तूंपैकी न वस्तू घेऊन येणाऱ्या क्रमचयाच्या संख्येचे $^{स}क्र_{न}$ ने अभिधान करतात.

म्हणून $^{स}क्र_{न}$ = स (स − १) (स − २).. (स − न + १)

आणि $^{स}क्र_{न}$ = स (स − १) (स − २) .... ३ × २ × १
= $\underline{स}$

संख्यात्मक प्रश्न सोडवितांना $^{स}क्र_{न}$ मधील स ने दिलेल्या वस्तूंचा आणि न या पादांकाने घेतलेल्या वस्तूंचा किंवा $^{स}क्र_{न}$ या सूत्रांत असलेल्या अवयवांचा बोध होतो.

उदाहरण १— १, २, ३,......९ ह्या पहिल्या नऊ प्राकृतिक अंकांपैकी कोणतेहि चार घेऊन निरनिराळ्या किती संख्या निर्माण होतात तें काढा.

९ वस्तूंपैकी प्रत्येकवेळा चार निवडून त्यांचा विन्यास करण्याचे किती संभाव्य प्रकार आहेत हें काढावयाचें आहे.

इष्ट फल = $^{९}क्र_{४}$
= ९ × ८ × ७ × ६
= ३०२४

उदाहरण २— 'परदेशगमन' या शब्दांतील अक्षरांच्या साह्या ने किती भिन्न शब्द निर्माण होतात ?

यांत ७ भिन्न अक्षरें आहेत. आणि ह्या सात अक्षरांच्या विन्यासाचे किती भिन्न प्रकार आहेत हें आपल्याला काढावयाचें आहे.

इष्ट फल = $^{७}क्र_{७}$

$= ७ \times ६ \times ५ \times ४ \times ३ \times २ \times १$

$= ५०४०$

९.४ स विजातीय वस्तूंपैकी प्रत्येक वेळीं न वस्तू घेऊन येणाऱ्या संचयांची संख्या काढणें.

स वस्तूंपैकी प्रत्येक वेळीं न वस्तू घेऊन येणाऱ्या संचयाच्या संख्येचें $^{स}च_{न}$ ने अभिधान करा.

आता प्रत्येक संचयांत न वस्तू असून त्या वस्तूंचा आपसांत विन्यास केल्यास त्याचे $^{न}क्र_{न}$ प्रकार होतात. पण एकंदर संचयाचे प्रकार $^{स}च_{न}$ आहेत. म्हणून विन्यासाचे एकंदर प्रकार $^{स}च_{न} \times {}^{न}क्र_{न}$ आहेत. परंतु अन्य रीतीनें स वस्तूंपैकी प्रत्येकवेळीं न वस्तू घेतल्यास क्रमचयांची संख्या $^{स}क्र_{न}$ आहे.

$$\therefore \; ^{स}च_{न} \times {}^{न}क्र_{न} = {}^{स}क्र_{न}$$

$$\text{पण } ^{स}क्र_{न} = स\,(स-१)(स-२) \ldots\ldots (स-न+१)$$

$$^{न}क्र_{न} = न\,(न-१).(न-२)\,.\,\ldots\ldots ३ \times २ \times १$$

$$\text{म्हणून } ^{स}च_{न} = \frac{स\,(स-१)(स-२)\ldots\ldots\ldots(स-न+१)}{१ \times २ \times ३ \ldots\ldots (न-१) \times न}$$

अंतिम फल दिसण्यांत भिन्नासारखें असलें तरी परिभाषेवरून, तें भिन्न नसून पूर्णांक आहे हें स्पष्ट आहे.

९.४१ ${}^{\text{स}}\text{च}_{\text{न}}$ ची प्राप्त अर्हा अन्य स्वरूपांत लिहितां येते ती अशी—

$${}^{\text{स}}\text{च}_{\text{न}} = \frac{\text{स}(\text{स}-१)\,(\text{स}-२)\ldots(\text{स}-\text{न}+१)}{१\times२\times३\ldots\ldots\text{न}}\ldots(१)$$

दक्षिण पक्षाच्या अंशाला आणि हराला $\lfloor \text{स}-\text{न}$ ने गुणा म्हणजे

$${}^{\text{स}}\text{च}_{\text{न}} = \frac{\text{स}\,(\text{स}-१)\,(\text{स}-२)\ldots\ldots(\text{स}-\text{न}+१)\,\lfloor \text{स}-\text{न}}{१\times२\times३\ldots\ldots\text{न}\times\lfloor \text{स}-\text{न}}$$

$$= \frac{\lfloor \text{स}}{\lfloor \text{न}\;\lfloor \text{स}-\text{न}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(२)$$

सामान्यतः, ${}^{\text{स}}\text{च}_{\text{न}}$ च्या अर्हेचें रूप, (२) मध्ये दिल्याप्रमाणे, लिहिण्याची पद्धत आहे.

$\lfloor ०$ चा अर्थ.

वर काढलेल्या ${}^{\text{स}}\text{च}_{\text{न}}$ च्या दुसऱ्या रूपांत न = स घेतल्यास

$${}^{\text{स}}\text{च}_{\text{स}} = \frac{\lfloor \text{स}}{\lfloor \text{स}\;\lfloor ०} = \frac{१}{\lfloor ०}$$

पण $^{स}च_{स}$ म्हणजे स वस्तूंपैकी सगळ्याच वस्तूंचा संचय करणें होय.

म्हणून $^{स}च_{स} = १$

$$\text{म्हणून } १ = \frac{१}{|\underline{०}}$$

यावरून $|\underline{०}$ ची अर्हा एक आहे असें समजावें लागतें.

९.४२ खालील संबंधांचें मनन करा.

$$|\underline{१६} = १६ \times १५ \, |\underline{१४}$$

$$|\underline{१०} = \frac{|\underline{१६}}{१६ \times १५ \times \dots \times ११}$$

$$|\underline{न} = न(न-१)\, |\underline{न-२}$$

$$= न\,(न-१)\,(न-२)\dots\dots(न-त)\, |\underline{न-त-१}$$

९.४३ खालील सूत्रें अत्यंत महत्त्वाचीं आहेत.

(१) $^{स}च_{न} = {}^{स}च_{स-न}$

(२) $^{स}च_{न} + {}^{स}च_{न-१} = {}^{स+१}च_{न}$

(१) ची सिद्धता

(९.४१) वरून $^{स}च_{स-न} = \dfrac{|\underline{स}}{|\underline{स-न}\; |\underline{स-(स-न)}}$

$$= \frac{|\underline{स}}{|\underline{स-न}\; |\underline{न}}$$

$$= {}^{स}च_{न}$$

$^{स}च_{न} = ^{स}च_{स-न}$ हें फल शब्दांत पुढीलप्रमाणे व्यक्त करतां येतें.

स वस्तूंपैकी प्रत्येक वेळीं न वस्तू निवडून येणाऱ्या संचयांची संख्या त्या स वस्तूंपैकी (स − न) वस्तू निवडून येणाऱ्या संचयांच्या संख्येसमान असते. अशा संचयांना संपूरकसंचय म्हणतात.

वरील फल अन्य रीतीनेहि काढतां येतें. ती रीत अशी—

$^{स}च_{न}$ म्हणजे स वस्तूंपैकी न वस्तूंचीनिवड करण्याचे सर्व संभाव्य प्रकार.

आता प्रत्येक प्रकारें न वस्तू निवडल्या म्हणजे अवशिष्ट (स − न) वस्तूंचा आपोआपच एक समूह निर्माण होतो.

म्हणून स वस्तूंपैकी न वस्तू निवडून होणाऱ्या संचयांची संख्या स वस्तूंपैकी (स − न) वस्तू निवडून येणाऱ्या संचयाच्या संख्येसमान असते. अर्थात्

$$^{स}च_{न} = ^{स}च_{न-१}$$

(२) ची सिद्धता—

$$^{स}च_{न} = ^{स}च_{न-१}$$

$$= \frac{\underline{|स}}{\underline{|न}\ \underline{|स-न}} + \frac{\underline{|स}}{\underline{|न-१}\ \underline{|स-न+१}}$$

$$= \frac{|\underline{\text{स}}}{|\underline{\text{न}-१}\;|\underline{\text{स}-\text{न}}} \left[ \frac{१}{\text{न}} + \frac{१}{\text{स}-\text{न}+१} \right]$$

$$= \frac{|\underline{\text{स}}}{|\underline{\text{न}-१}\;|\underline{\text{स}-\text{न}}} \times \frac{(\text{स}-\text{न}+१+\text{न})}{\text{न}\,(\text{स}-\text{न}+१)}$$

$$= \frac{(\text{स}+१)\;|\underline{\text{स}}}{\text{न}\;|\underline{\text{न}-१}\;(\text{स}-\text{न}+१)\;|\underline{\text{स}-\text{न}}}$$

$$= \frac{|\underline{\text{स}+१}}{|\underline{\text{न}}\;|\underline{\text{स}+१-\text{न}}}$$

$$= {}^{\text{स}+१}\text{च}_{\text{न}}$$

उदाहरण १— ${}^{१६}\text{च}_{१३}$ ची अहीं काढा.

आता ${}^{\text{स}}\text{च}_{\text{न}} = {}^{\text{स}}\text{च}_{\text{स}-\text{न}}$

म्हणून ${}^{१६}\text{च}_{१३} = {}^{१६}\text{च}_{१६-१३}$

$$= {}^{१६}\text{च}_{३}$$

$$= \frac{१६\times१५\times१४}{१\times२\times३}$$

$$= ५६०$$

उदाहरण २— ८ माणसांपैकी कोणतींहि ३ निवडावयाचीं आहेत. तर किती प्रकारे निवड करतां येईल?

या प्रवरणांत एक विशिष्ट माणूस निवडलाच जाल असेल तर प्रवरणाचे संभाव्य प्रकार किती?

८ माणसांपैकी ३ माणसें निवडावयाचीं आहेत. त्यांचे संभाव्य प्रकार $^{८}च_{३}$

∴ इष्ट प्रकार $= {}^{८}च_{३}$

$$= \frac{८ \times ७ \times ६}{१ \times २ \times ३} = ५६$$

आता तीन माणसें निवडताना एक विशिष्ट माणूस प्रत्येक वेळीं असतोच म्हणजेच उर्वरित ७ माणसांतून दोघांची निवड करावयाची आहे.

त्याचे इष्ट प्रकार $= {}^{७}च_{२}$

$= २१$

या २१ प्रकारांत एक विशिष्ट माणूस नेहमी निवडला जाईल.

उदाहरण ३—

८ पुरुष आणि ५ स्त्रिया यांच्यापैकी ७ जणांची एक समिति निर्माण करावयाची असल्यास

(१) स्त्रियांपैकी केवळ ३ च स्त्रिया किंवा (२) स्त्रियांपैकी कमींत कमी ३ स्त्रिया निवडल्यास प्रत्येक वेळेस निवडणुकीचे प्रकार किती तें काढा.

(१) ५ स्त्रियांपैकी केवळ ३ च स्त्रिया निवडण्याचे प्रकार $= {}^{५}च_{३}$ समितींतील इतर चार सदस्य ८ पुरुषां-

मधून निवडावयाचे आहेत. म्हणून त्याचे प्रकार $= {}^{8}\text{च}_{4}$ म्हणून निवडणूकीचे एकंदर प्रकार

$= {}^{5}\text{च}_{3} \times {}^{8}\text{च}_{4}$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 700$$

(२) समितींत कमींत कमी ३ स्त्रिया असावयास पाहिजेत. म्हणजे ३ किंवा ४ किंवा ५ हि स्त्रिया त्या समितींत राहूं शकतील.

प्रथम समजा ३ स्त्रिया निवडल्या तर ४ पुरुष निवडले जातील. म्हणून निवडणुकीचे प्रकार ${}^{5}\text{च}_{3} \times {}^{8}\text{च}_{4}$ दुसऱ्यांदा समजा ४ स्त्रिया निवडल्या तर ३ पुरुष निवडले जातील. म्हणून निवडणुकीचे प्रकार ${}^{5}\text{च}_{4} \times {}^{8}\text{च}_{3}$

तिसऱ्यांदा समजा ५ स्त्रिया घेतल्या तर २ पुरुष निवडले जातील. म्हणून निवडणुकीच प्रकार

${}^{5}\text{च}_{5} \times {}^{8}\text{च}_{2}$

$\therefore$ एकंदर प्रकार

$= {}^{5}\text{च}_{3} \times {}^{8}\text{च}_{4} + {}^{5}\text{च}_{4} \times {}^{8}\text{च}_{3} + {}^{5}\text{च}_{5} \times {}^{8}\text{च}_{2}$

$= 700 + 280 + 28$

$= 1008$

९.५ ${}^{\text{स}}\text{च}_{\text{न}}$ ची अर्हा महत्तम असण्याकरिता न ची अर्हा काढणें.

आता $^{स}च_{न} = \dfrac{स(स-१)(स-२)\ \ldots\ldots(स-न+१)}{न(न-१)(न-२)\ \ldots\ldots\ ३\times२\times१}$

$$= \frac{स-न+१}{न} \times {}^{स}च_{न-१}$$

यावरून $^{स}च_{न-१}$ ला $\dfrac{स-न+१}{न}$ ने गुणून

$^{स}च_{न}$ प्राप्त होते.

किंवा $\dfrac{^{स}च_{न}}{^{स}च_{न-१}} = \dfrac{स-न+१}{न}$

आता $\dfrac{स-न+१}{न} \gtreqless १$ असल्यास $^{स}च_{न} \gtreqless {}^{स}च_{न-१}$

किंवा न $\lesseqgtr \dfrac{स+१}{२}$ असल्यास $^{स}च_{न} \gtreqless {}^{स}च_{न-१}$

प्रकार १ ला— समजा स सम आहे आणि त कोणताहि धन पूर्णांक असून स = २त आहे.

म्हणून $\dfrac{स+१}{२} = \dfrac{२त+१}{२} = त + \dfrac{१}{२}$

आता न च्या १ पासून त पर्यंत सर्व अंकांकरितां न $< \dfrac{स+१}{२}$

$\therefore\ {}^{स}च_{न} > {}^{स}च_{न-१}$

आता न = २, ३,...... त घेऊन

$$^{स}च_{त} > {}^{स}च_{त-१} > {}^{स}च_{त-२} \cdots > {}^{स}च_{३} > {}^{स}च_{२} > {}^{स}च_{१}$$

यावरून $^{स}च_{१}$, $^{स}च_{२}$,......$^{स}च_{त-१}$, $^{स}च_{त}$ यांपैकी $^{स}च_{त}$ ची अर्हा महत्तम आहे.

आता न च्या आगामी उच्चतर अर्हा त+१, त+२......२त ह्या आहेत म्हणून ;

$$न > \frac{स+१}{२}$$

म्हणून $^{स}च_{त} < {}^{स}च_{त-१}$

अर्थात् $^{स}च_{त} > {}^{स}च_{त+१} > {}^{स}च_{त+२} \cdots\cdots > {}^{स}च_{२त}$

यावरून $^{स}च_{त}$, $^{स}च_{त+१}$, ............ $^{स}च_{त+२}$, यांपैकी $^{स}च_{त}$ ची अर्हा महत्तम आहे

म्हणून $^{स}च_{१}$, $^{स}च_{२}$, ......$^{स}च_{२त}$ मध्ये $^{स}च_{त}$ ची अर्हा महत्तम आहे पण $= \frac{स}{२}$

म्हणून स सम असल्यास $^{स}च_{\frac{स}{२}}$ याची अर्हा महत्तम असते.

प्रकार २ रा—

समजा स विषम आहे. थ हा धनपूर्णांक असून स = २थ+१ आहे.

$$म्हणून \quad \frac{स+१}{२} = \frac{२थ+१+१}{२} = थ+१$$

आता न च्या १ पासून थ पर्यंत सर्व अहांकरिता $न < \frac{स+१}{२}$

म्हणून ${}^{स}च_{न} > {}^{स}च_{न-१}$

आता न = १,२, ३ ... ............ थ हे आदेश करून

${}^{स}च_{थ} > {}^{स}च_{थ-१} > {}^{स}च_{थ-२}$ ...... ${}^{स}च_{२} > {}^{स}च_{१} > {}^{स}च_{०}$

अर्थात् ${}^{स}च_{०}, {}^{स}च_{१}$, ...... ${}^{स}च_{थ}$ यांपैकी ${}^{स}च_{थ}$ ही अर्हा महत्तम आहे.

आता न = थ + १ असल्यास ${}^{स}च_{थ} = {}^{स}च_{थ+१}$

पुन्हा न च्या (थ+२) पासून (२थ+१) च्या अहांकरिता :

${}^{स}च_{न} < {}^{स}च_{न-१}$

∴ आता न = थ+२,......२थ+१ ठेवा.

म्हणजे ${}^{स}च_{थ+१} > {}^{स}च_{थ+२} > {}^{स}च_{२थ+३}$...... ${}^{स}च_{थ+१}$

म्हणून ${}^{स}च_{थ+१}, {}^{स}च_{थ+२}, {}^{स}च_{थ+३}$ ...... ${}^{स}च_{२थ+१}$ यांपैकी

${}^{स}च_{थ+१}$ ची अर्हा महत्तम आहे.

यावरून जेव्हा स विषम असून २थ+१ समान असतो तेव्हा

${}^{स}च_{थ}$ आणि ${}^{स}च_{थ+१}$ महत्तम असून समान असतात.

आता स = २थ + १

$$\therefore \quad थ = \frac{स-१}{२}$$

म्हणून स विषम असल्यास

${}^{स}च_{\frac{स-१}{२}}$ आणि ${}^{स}च_{\frac{स+१}{२}}$ यांच्या अहीं महत्तम असून समान असतात.

९.६ (म+न) विजातीय वस्तूंचे अनुक्रमें म आणि न वस्तू असणारे दोन समूह किती संभाव्य प्रकारांनी निर्माण होतात ते काढणें.

आता (म+न) विजातीय वस्तूंचे प्रत्येकीं म आणि न वस्तू असणाऱ्या समूहांच एकंदर प्रकार काढणे हें (म+न) वस्तूंपैकी म वस्तूंच सर्व संभाव्य संचय करण्यासारखेच आहे

कारण प्रत्येकवेळीं न वस्तूंचा एक समूह करतांना आपोआपच न वस्तूंचा एक समूह होतो.

$$\text{म्हणून इष्ट प्रकार} = \frac{|\underline{म+न}}{|\underline{म}\;|\underline{(म+न)-म}}$$

$$= \frac{|\underline{म+न}}{|\underline{म}\;|\underline{न}}$$

टीप— जर म=न असेल तर न आणि न यांच्या संचर्गातील वस्तूंची संख्या समान होते. आणि म्हणून समूहांच्या व्यतिहरणामुळे नवीन समूह-निर्मित होत नाही. दिलेल्या

वस्तूंच्या प्रत्येक विभाजनांत व्यतिहरणाचे प्रकार $\underline{|२}$ असल्यामुळे संचयाचे सर्व संभाव्य प्रकार

$$= \frac{\underline{|२म}}{\underline{|म}\ \underline{|म}\ \underline{|२}}$$

९.६१ (म+न+ट) वस्तूंचे अनुक्रमे म, न आणि ट वस्तू असणारे तीन समूह किती संभाव्य प्रकारांनी निर्माण होतात तें काढणें.

प्रथम (म+न+ट) वस्तूंचे म आणि (न+ट) वस्तू असणाऱ्या दोन समूहांत भाग करा. म्हणजे वरील अनुच्छेदावरून एकंदर संभाव्य प्रकार

$$= \frac{\underline{|म+न+ट}}{\underline{|म}\ \underline{|न+ट}}$$

आता (न+ट) वस्तूंच्या एका समूहाचे न आणि ट वस्तू असणारे दोन समूह $\frac{\underline{|न+ट}}{\underline{|न}\ \underline{|ट}}$ इतक्या प्रकारांनी होतील. पण (न+ट) वस्तू असणाऱ्या समूहाचे संभाव्य प्रकार $\frac{\underline{|म+न+ट}}{\underline{|म}\ \underline{|न+ट}}$ आहेत.

म्हणून (म+न+ट) वस्तूंचे प्रत्येकी म, न आणि ट वस्तू असणारे तीन समूह करण्याचे एकंदर प्रकार

$$=\frac{\underline{|\text{म}+\text{न}+\text{ट}}}{\underline{|\text{म}}\;\underline{|\text{न}+\text{ट}}}\times\frac{\underline{|\text{न}+\text{ट}}}{\underline{|\text{न}}\;\underline{|\text{ट}}}=\frac{\underline{|\text{म}+\text{न}+\text{ट}}}{\underline{|\text{म}}\;\underline{|\text{न}}\;\underline{|\text{ट}}}$$

किती वस्तूंचा समूह आधी करावयाचा याला मुळीच प्राधान्य नाही हा गोष्ट अंतिम फलाच्या रूपावरून सहज ध्यानांत येईल.

टीप— जर म=न=ट असेल तर म, न आणि ट यांच्या संचयांतील वस्तूंची संख्या समान होते. आणि समूहांच्या व्यतिहरणामुळे नवीन समूह-निर्मिति होत नाही. दिलेल्या वस्तुच्या प्रत्येक विभाजनांत व्यतिहरणामुळे $\underline{|\text{३}}$ प्रकार असल्यामुळे संचयाचे सर्व संभाव्य प्रकार

$$\frac{\underline{|\text{३म}}}{\underline{|\text{म}}\;\underline{|\text{म}}\;\underline{|\text{म}}\;\underline{|\text{३}}}$$

उदाहरण— २४ विद्यार्थ्यांचा एक वर्ग आहे. त्यांतून समान विद्यार्थ्यांचे तीन गट पाडावयाचे आहेत. तर हे गट किती प्रकारांनी पाडतां येतील ?

आपल्याला प्रत्येक गटांत समान विद्यार्थी असलेले गट पाडावयाच आहेत. एकंदर विद्यार्थी २४ आहेत. म्हणून प्रत्येक गटांत ८ विद्यार्थी राहतील.

$$\therefore \text{संचयाचे प्रकार} = \frac{\underline{|२४}}{\underline{|८}\ \underline{|८}\ \underline{|८}\ \underline{|३}}$$

९.७ आतापर्यंत आपण केवळ विजातीय वस्तूच विचारांत घतल्या परंतु दिलेल्या वस्तूंपैकी कांही सजातीय किंवा समरूप (like) असल्यास प्रश्न कसे सोडवावयाचे तें आपण पाहूं.

आता सजातीय आणि विजातीय हे शब्द कोणत्या अर्थाने वापरले जातात हें प्रथम पाहिलें पाहिजे.

एकाच साधारण धर्माच्या वस्तूंना सजातीय वस्तू असें म्हणतात.

भिन्न धर्माच्या वस्तूंना विजातीय वस्तू असें म्हणतात.

९.७१ दिलेल्या स वस्तूंपैकी त एका प्रकारच्या सजातीय, थ दुसऱ्या प्रकारच्या सजातीय आणि इतर सर्व वस्तू एकैकशः विजातीय असल्यास त्या वस्तूंच्या विन्यासाच्या प्रकारांची संख्या काढणें.

समजा स वर्ण दिले आहेत. त्यांपैकी त वर्ण फ, थ वर्ण ब उर्वरित (स – त – थ) वर्ण एकैकशः विजातीय आहेत.

समजा क्रमचयांचे संभाव्य प्रकार य आहेत.

आता सजातीय न वर्ण एकैकशः परस्परांहून भिन्न आणि उरलेल्या वर्णांहून भिन्न मानल्यास क्रमचयांच्या प्रत्येक प्रकारापासून इतर वर्णांची स्थिति न बदलतां |त नव क्रमचय निर्माण होतात.

म्हणून य क्रमचयापासून $\text{य} \times \underline{|\text{त}}$ क्रमचय निर्माण होतात.

तसेंच सजातीय थ वर्ण एकैकशः विजातीय मानल्यास $\text{य}\underline{|\text{त}}$ क्रमचयांपासून $\text{य} \times \underline{|\text{त}} \times \underline{|\text{थ}}$ क्रमचय निर्माण होतात.

सजातीय त आणि सजातीय थ वर्णांऐवजी सर्वच विजातीय वर्ण घतल्यामुळे सर्वच्या सर्व वर्ण विजातीय झाले आहेत. आता त्यांच्या क्रमचयांचे प्रकार $= \underline{|\text{स}}$

$$\text{म्हणून} \quad \text{य} \times \underline{|\text{त}} \times \underline{|\text{थ}} = \underline{|\text{स}}$$

$$\text{किंवा य} = \frac{\underline{|\text{स}}}{\underline{|\text{त}}\ \underline{|\text{थ}}}$$

$$\therefore \text{ इष्ट फल} = \frac{\underline{|\text{स}}}{\underline{|\text{त}}\quad \underline{|\text{थ}}}$$

उदाहरण— एकंदर १० वर्ण आहेत त्यांपैकी २ वर्ण क, ३ वर्ण ख आणि उर्वरित वर्ण एकैकशः विजातीय आहेत. तर क्रमचयांचे संभाव्य प्रकार किती ते काढा.

१० वर्णांपैकी २ एका प्रकाराचे, ३ दुसऱ्या प्रकाराचे आणि उर्वरित ५ भिन्न भिन्न प्रकारचे आहे. तेव्हा क्रमचयांचे संभाव्य प्रकार

$$= \frac{\underline{|\text{१०}}}{\underline{|\text{३}}\ \underline{|\text{२}}}$$

$$= \frac{१० \times ९ \times ८ \times ७ \times ६ \times ५ \times ४ \times ३ \times २ \times १}{२ \times १ \times ३ \times २ \times १}$$

$= ३०२४००$

९.८ स प्रकारांच्या वस्तूंपैकी प्रत्येक वेळा न वस्तूंना क्रमचय करतांना, प्रत्यक वस्तु पुन्हा पुन्हा अशी न वेळां घेतां येत असल्यास, क्रमचयांचे संभाव्य प्रकार किती ?

दिलेल्या वस्तूंपैकीं प्रत्येक वस्तु कोणत्याहि विन्यासांत वाटेल तितक्या वेळा घेतां येत असल्यास त्या वस्तूंनी न जागा भरण्याच्या प्रकारांची संख्या काढावयाची आहे.

पहिली जागा स वस्तूंपैकी कोणत्याहि एकीने भरतां येते. म्हणून पहिली जागा भरण्याचे स प्रकार आहेत.

पहिली जागा कोणत्याहि एका प्रकारें भरल्यानंतर दुसरी जागा पुनः स पैकी कोणत्याहि एकीनें भरता येते अर्थात् ती जागा भरून काढण्याचे स प्रकार आहेत म्हणून पहिल्या दोन जागा भरण्याचे स × स = स² प्रकार आहेत.

तिसरी जागाहि स प्रकारांनी भरतां येते. म्हणून पहिल्या तीन जागा स² × स = स³ प्रकारांनी भरतां येतात.

अशाप्रकारें जितक्या जागा भरल्या जातात त्याच घातास स ने उन्नयन करून येणाऱ्या संख्येसमान त्या जागा भरण्याचे संभाव्य प्रकार होतात. म्हणून न जागा भरून काढण्याचे संभाव्य प्रकार सन आहेत.

उदाहरण— ३ पारितोषिके ५ मुलांमध्ये—प्रत्येक मुलगा सर्व

पारितोषिकें मिळविण्यास पात्र असल्यास— किती प्रकारांनी देतां येतील ?

३ पारितोषिकांपैकी कोणतेंहि एक ५ मुलांपैकी कोणाहि एकाला देतां येतें. म्हणून तें पारितोषिक देण्याचे ५ प्रकार आहेत.

पहिलें पारितोषिक कोणत्याहि एका प्रकारें दिल्यानंतर उरलेल्या २ पारितोषिकांपैकी कोणतेंहि एक पुन्हा ५ पैकी कोणाहि एकाला देतां येतें म्हणून दोन पारितोषिकें देण्याचे एकंदर प्रकार $५^२$.

दुसरें पारितोषिक एकाला दिल्यानंतर तिसरें पारितोषिक पुन्हा ५ पैकी कोणाहि एकाला देतां येतें म्हणून तिन्हीं पारितोषिकें देण्याचे संभाव्य प्रकार

$$= ५^२ \times ५ \quad = ५^३ \quad = १२५$$

९.८१ स वस्तूंपैकी कांही किंवा सर्वच निवडल्यास निवडणुकीचे संभाव्य प्रकार काढणें.

आता प्रत्येक वस्तु एकतर निवडली जाईल किंवा गाळली जाईल. म्हणून प्रत्येक वस्तु दोन प्रकारांनी विचारांत घेतली जाते. ह्या सर्व विकल्पांचा एकैकशः संबंध जोडल्यास सर्व प्रकार

$= २ \times २ \times २ \times \ldots$ स अवयवांपर्यन्त.

$= २^{स}$

परंतु या सर्व प्रकारांत, ज्यांत प्रत्येक वस्तु गाळली

आहे असाहि एक प्रकार समाविष्ट झाला आहे. अर्थात् तो गाळला पाहिजे.

म्हणून एकंदर संभाव्य प्रकार $= २^{स} - १$

९.८२ (त + थ + द + ...) वस्तूंमध्ये त एकप्रकारच्या सजातीय, थ दुस-याप्रकारच्या सजातीय, द तिसऱ्या-प्रकारच्या सजातीय ...... आहेत. त्यांपैकी कांहींची किंवा सर्वांची निवड करावयाची असल्यास निवडणुकीच्या प्रकारांची संख्या काढणें.

आता पहिल्या प्रकारच्या त सजातीय वस्तूंपैकी १,२,३,........ किंवा त वस्तू निवडल्या जातील किंवा एकहि निवडली जाणार नाही. म्हणून त वस्तूंच्या निवडणुकीचे प्रकार (त + १) होतील.

त्याचप्रमाणे सजातीय थ वस्तूंच्या निवडणुकीचे प्रकार (थ + १) आणि सजातीय द वस्तूंच्या निवडणुकीचे प्रकार (द + १) होतील.

तसेच इतरहि सजातीय वस्तूंकरिता हाच नियम लागू होईल.

म्हणून दिलेल्या वस्तूंच्या निवडणुकीचे प्रकार

= (त + १) (थ + १)(द + १)..........

परंतु या सर्व प्रकारांत, ज्यांत कोणतीच वस्तु निवडली जात नाही असा एक प्रकार समाविष्ट केला आहे. अर्थात् हा प्रकार गाळला पाहिजे.

∴ निवडणुकीचे इष्ट प्रकार

$=[(त+१)(थ+१)(द+१) \ldots\ldots\ldots\ldots]-१$

उदाहरण १— एका दूरलिखसाधित्राला (telegraph apparatus) ६ भुजा आहेत विश्रामावस्थेसकट प्रत्येक भुजेन ५ भिन्न सिग्नल दाखवितां येणे शक्य आहे. तर निरनिराळे सिग्नल करण्याचे प्रकार १५६२४ आहेत. हें सिध्द करा.

पहिली भुजा विश्रामावस्थेसकट ५ सिग्नल करूं शकते पहिल्या भुजेचा ५ पैकी कोणतीहि एक स्थिति निश्चित झाली म्हणजे दुसरी भुजा विश्रामावस्थेसकट ५ सिग्नल करूं शकते म्हणून दोन्ही भुजा $५^२$ सिग्नल करूं शकतात. यांतच दोघींची एकाच वेळची विश्रामवस्थाहि गणली गेली आहे.

तीन भुजा $५^३$ सिग्नल दाखवितात.

यावरून एकंदर ६ भुजांनी $५^६$ सिग्नल दर्शविले जातात. पण ह्या सर्व प्रकारांत ज्यांत सर्व भुजा विश्रामास्थितींत राहतील असाहि एक प्रकार राहील. तो वगळून

एकंदर प्रकार $=५^६-१=१५६२४$

उदाहरण २— एका आगगाडीला १६ डबे आहेत त्यांपैकी पहिल्या वर्गाचे ३, दुसऱ्या वर्गाचे ४, आणि तिसऱ्या वर्गाचे ५ असून इतर निरनिराळ्या कामाचे आहेत, तर ते डबे किती प्रकारांनी जोडता येतील?

तसेंच पहिल्या वर्गाचे तिन्ही डबे लागोपाठ जोडल्यास ते सर्व डबे किती प्रकारांनी जोडतां येतील ?

आगगाडीच्या १६ डब्यांपैकी ३ एका प्रकारचे, ४ दुसऱ्या

प्रकारचे आणि ५ तिसऱ्या प्रकारचे असून इतर ४ निरनिराळे आहेत.

म्हणून क्रमचयांचे प्रकार $= \dfrac{|\underline{१६}}{|\underline{३}\;|\underline{३}\;|\underline{५}}$

आता पहिल्या वर्गाचे तिन्ही डबे एका ठिकाणी जोडल्यास त्या तिघांचा मिळून एकच डबा मानावा लागतो. अर्थात् एकंदर डब्यांची संख्या १४ होते. त्यापैकी ४ एका प्रकारचे, ५ दुसऱ्या प्रकारचे आणि इतर ५ निरनिराळ्या प्रकारचे आहेत.

∴ क्रमचयांचे प्रकार $= \dfrac{|\underline{१४}}{|\underline{५}\;|\underline{४}}$

उदाहरण ३— ११ वर्ण दिले असून त्यांपैकी चार क, तीन ख, दोन ग आणि इतर घ, च, छ, ज आहेत तर कोणत्याही चार वर्णांच्या प्रकरणांचे तसेच विन्यासांचे प्रकार किती ते काढा.

एकंदर वर्ण ११ असून त्यांच्या जाती ७ आहेत.

क, क; ख, ख, ख; ग, ग; घ, च, छ, ज.

चार चारांचा समूह करतांना त्यांचे खालीलप्रमाणे वर्गीकरण करतां येईल.

(१) ३ सजातीय आणि एक विजातीय

(२) २ सजातीय आणि दुसरे २ सजातीय

(३) २ सजातीय आणि २ विजातीय

(४) चारहि विजातीय

(१) ख हेच केवळ तीन सजातीय वर्ण आहेत, त्यांच्या बरोबर क, ग, घ, च, छ आणि ज या ६ पैकी कोणताहि एक वर्ण घेतां येईल म्हणून अशा प्रवरणाचे ६ प्रकार होतात.

(२) २ क, ३ ख आणि २ग मधून दोन दोन सजातीय वर्ण निवडतां येतात. त्याचे प्रकार $^{३}स_{२}$ म्हणजेच ३.

(३) २ क, ३ख, आणि २ग मधून एक सजातीय युग्म तीन प्रकारें घेतां येते. आणि या प्रत्येक प्रकाराबरोबर घ, च, छ, ज हे आणि क, ख, ग पैकी दोन अशा एकंदर सहा वर्णांतून कोणतेहि २ घेतां येतात म्हणून ह्या प्रवरणाचे प्रकार

$$= ३ \times {}^{६}च_{२}$$

$$= \frac{३ \times ६ \times ५}{१ \times २} = ४५$$

(४) क, ख, ग, घ, च, छ, ज या वर्णांपैकी कोणतेहि चार वर्ण घेतल्यास प्रवरणाचे प्रकार

$$= {}^{७}च_{४} = \frac{७ \times ६ \times ५ \times ४}{१ \times २ \times ३ \times ४} = ३५$$

∴ प्रवरणाचे सर्व संभाव्य प्रकार

$$= ६ + ३ + ४५ + ३५$$

$$= ८९$$

आता क्रमचयांचे प्रकार काढण्याकरिता संचयाच्या प्रत्येक प्रकारात किती क्रमचय होतात हें काढलें पाहिजे.

पहिल्या प्रकारापासून $\dfrac{६ \times |\underline{४}}{|\underline{३}}$ = २४ क्रमचय

दुसऱ्या प्रकारापासून $३ \times \dfrac{|\underline{४}}{|\underline{२}\ |\underline{२}}$ = १८ क्रमचय

तिसऱ्या प्रकारापासून $४५ \times \dfrac{|\underline{४}}{|\underline{२}}$ = ५४० क्रमचय

चवथ्या प्रकारापासून $३५ \times |\underline{४}$ = ८४० क्रमचय

तेव्हां क्रमचयांचे एकंदर प्रकार

= २४ + १८ + ५४० + ८४०

= १४२२

## प्रश्नसंग्रह १४

(१) मुंबई ते कराची जा ये करणाऱ्या ८ आगबोटी आहेत. एक मनुष्य मुंबईहून कराचीस एका आगबोटीने जाऊन दुसऱ्याच आगबोटीने परत येत असल्यास किती प्रकारांनी तो जाये करूं शकेल ?

(२) १० कादंबऱ्या, ६ मासिकें आणि ८ वर्तमानपत्रें यांपैकी प्रत्येकांतून एक एक घेतल्यास अचरणाचे किती प्रकार होतील. ?

(३) एका फळीवर केवळ आठच पुस्तकें मावतात. परंतु हाताशीं १२ पुस्तकें आहेत. तर तीं किती निरनिराळ्या प्रकारांनी त्या फळीवर ठेवतां येतील ?

(४) ८ पुस्तकांपैकी दोन विशिष्ट पुस्तकें लागोपाठ येतील अशा प्रकारें तीं एका फळीवर लावावयाचीं आहेत. तर त्यांच्या रचनेचे प्रकार किती ?

(५) १० मुलांची एक रांग करावयाची आहे. तर ती किती प्रकारांनी करतां येईल ? यांपैकी किती प्रकारांत आद्य आणि अंत्य स्थानीं दोन विशिष्ट मुलें उभी राहतील ?

(६) परीक्षेच्या ११ प्रश्नपत्रिका क्रमानें लावावयाच्या आहेत. परंतु त्यांतील गणिताच्या ३ प्रश्नपत्रिकांपैकी कोणत्याहि दोन लागोपाठ येतां कामा नयेत. तर त्या किती प्रकारांनी लावतां येतील ?

(७) हताच्या रूपांत व्यक्त करा.

(१) $१२ \times ११ \times १०$ (२) $८ \times ९ \times १० \times ११$

(३) स (स − १) (स − २) (स − ३)

(४) स (स + १) (स + २)

(५) स (स + १) (स + २) (स + ३)...... (स + न)

(८) सरळ रूप द्या—

(१) $\dfrac{|\underline{\text{स}}}{|\underline{\text{स} - २}}$ (२) $|\underline{\text{स}} - |\underline{\text{स} - २}$

(९) सिद्ध करा—

(१) $|\underline{२स} \div |\underline{स} = २^{स}[१ \times ३ \times ५ \times ७ \ldots (२स - १)]$

(२) $२ \times ६ \times १० \times १४ \ldots (४स - ६)\ (४स - २)$

$= (स + १)\ (स + २)\ (स + ३) \ldots (२स - १)\ (२स)$

(१०) इंद्रधनुष्याच्या सात रंगांपैकी निळा आणि हिरवा रंग जवळ जवळ येणार नाहीत अशाप्रकारें त्यांचा विन्यास केल्यास विन्यासाचे संभाव्य प्रकार किती ? [मुंबई १९१८

(११) तीन व्यंजनें आणि दोन स्वर मिळून असे शब्द तयार करावयाचे आहेत की ज्यांत दोन व्यंजनें कधीहि जवळ जवळ येणार नाहीत तर शब्द किती होतील ?

(१२) ${}^{४०}च_{३७}$, ${}^{२८}च_{२४}$, आणि ${}^{१५}च_{१०}$ यांच्या अर्हा काढा.

(१३) ${}^{६}क_{६}$, ${}^{२४}क_{४}$ आणि ${}^{१०}क_{५}$ यांच्या अर्हा काढा.

(१४) ${}^{२स}च_{न} = {}^{२स}च_{न+२}$ असल्यास न ची अर्हा काढा.

(१५) $म = {}^{स}च_{२}$ असल्यास ${}^{म}च_{२} = ३\ {}^{स+१}च_{४}$ आहे हें दाखवा. [कलकत्ता १९१२

(१६) एका आगगाडीच्या डब्यांत उतारूंना बसण्याकरितां ६ जागा आहेत. दोन उतारू किती प्रकारांनी त्या जागांवर बसूं शकतील ?

(१७) ५ स्त्रिया आणि तीन पुरुष टेनिस खेळणार आहेत एक पक्ष पूर्णतः पुरुषांचा होऊं द्यावयाचा नसल्यास किती प्रकारांनी गट पाडतां येतील ?

(१८) क्रिकेटपटूंच्या दोन समूहांत अनुक्रमे ६ आणि ८ खेळाडू आहेत. त्यांसर्वांमधून ११ जणांची एक क्रिकेट-चमू निवडावयाची आहे. ६ जणांच्या समूहांतून कमीत कमी ४ खेळाडू घ्यावयाचे असल्यास ती चमू किती प्रकारांनी बनविता येईल? [मद्रास १८९०

(१९) दोन क्रिकेट मंडळांत प्रत्येकी १५ सदस्य आहेत त्यांच्यामध्ये होणाऱ्या सामन्यांत दोन्ही मंडळांतून ११-११ सदस्य निवडावयाचे आहेत. परंतु पहिल्या मंडळांतील क हा सदस्य प्रत्येक निवडणुकीत घेतला जाईल उलट ख हा सदस्य नेहमीच वगळला जाईल, तर किती प्रकारें सामना होऊं शकेल?

(२०) एका क्रिकेटमंडळाचे १४ सदस्य असून त्यांपैकी गोल-दाजी ५ जणांना करतां येते. ११ जणांच्या चमूमध्ये प्रत्येक वेळीं कमीत कमी ३ गोलंदाज घ्यावयाचेच असल्यास त्या सर्व सदस्यांमधून ती चमू करण्याचे किती भिन्न प्रकार होतील? [आंध्र १९४१

(२१) १६ क्रिकेट खेळाडूंपैकी ६ जण गोलंदाज, व २ जण निफळीरक्षक आहेत. ११ जणांच्या चमूमध्ये ४ गोलंदाज आणि २ निफळीरक्षक नेहमीच असल्यास निवडणाचे किती प्रकार होतील? [आंध्र १९३५

(२२) १, ३, ५ आणि ७ यांतील प्रत्येक अंक एकदाच येईल अशा १००० पुढील किती संख्या होतील? या संख्यांचा योगहि काढा.

(२३) दिलेल्या १२ वस्तूंपैकी ८ वस्तूंच्या किती क्रमचयांत

चार ठराविक वस्तू राहतील ते काढा.

[नागपूर १९२५

(२४) दिलेल्या १० वस्तूंपैकी ४ वस्तूंचे क्रमचय केल्यास त्यांपैकी किती क्रमचयांत एक ठराविक वस्तु येईल आणि किती क्रमचयांतून तीच वस्तु गाळली जाईल?

[कलकत्ता १९३६

(२५) एका आतिथ्यशील सद्गृहस्थाला आपल्या ४० मित्रांपैकी निरनिराळ्या मित्रांना बोलावून जास्तीत जास्त मेजवान्या द्यावयाच्या आहेत. प्रत्येक मेजवानीस येणाऱ्या मित्रांची संख्या सारखीच असल्यास एका वेळेस त्याने किती मित्रांना बोलवावें ? तो अशा किती मेजवान्या देईल ? [मुंबई १८८४

(२६) एक मनुष्य आपल्या १२ मित्रांचे गट पाडून निमंत्रण देतो. प्रत्येकवेळीं निमंत्रितांची संख्या समान असून गटांची संख्या जास्तींत जास्त होण्यास प्रत्येक गटांत त्याने किती मित्र बोलवावेत ?

एकच मित्र ज्या गटात येईल असे गट किती ?

[म्हैसूर १९३२

(२७) एका वाचनालयांत १६ संस्कृत आणि ८ मराठी पुस्तकें आहेत. त्यांतील एका फळावर ४ संस्कृत आणि ३ मराठी पुस्तकें अशा ७ पुस्तकांचा समूह किती प्रकारांना ठवतां येईल ?

(२८) ७ पिंढ आणि ५ प्रास हे एका ओळींत किती प्रकारांनी ठेवितां येतील ?

(२९) २ निळ्या, १ पांढरी, १ लाल आणि १ काळी अशा ५ पताकांनी किती प्रकारचे सिग्नल केले जातील ?

(३०) एका वाचनालयांत एका पुस्तकाच्या ५ प्रती, २ पुस्तकांच्या प्रत्येकीं ४ प्रती, ३ पुस्तकांच्या प्रत्येकी ६ प्रती आणि ८ निरनिराळीं पुस्तकें आहेत. तर तीं पुस्तकें किती प्रकारांनी लावतां येतील ?

[कलकत्ता १९३४

(३१) स विजातीय वस्तूंपैकी न वस्तूंच्या क्रमचयांच्या प्रकारांचे क्र$_{न}$ ने अभिधान केलें तर

$$क्र_1 + \frac{क्र_2}{\underline{|2}} + \frac{क्र_3}{\underline{|3}} + \cdots\cdots + \frac{क्र_स}{\underline{|स}} = 2^{स} - 1$$

हें दाखवा. [मद्रास १८८०

(३२) १५ चेंडूंपैकी ६ काळे, ५ लाल आणि ४ पांढरे असल्यास ते एका ओळींत किती प्रकारांनी ठेवितां येतील ?

(३३) २ पांढऱ्या, २ काळ्या आणि २ लाल पताकांनी, (प्रत्येक सिग्नल सहाहि पताकांनी केला असल्यास) किती प्रकारचे सिग्नल करतां येतील ?

(३४) ०, १, १, २, ३, ४ या अंकांपासून (१००० च्या पुढील) चार अंकी किती संख्या तयार करतां येतील ?

[मद्रास १८८९

(३५) १, २, ३, ३, ३, ४ हे अंक उपयोगांत आणून ४००० च्या खालच्या किती संख्या तयार करतां येतील ?

[मद्रास १९१८

(३६) १२१२०२ या संख्येंतील अंकांनी सहा अंकी किती वेगवेगळ्या संख्या होतील तें काढा. [मद्रास १८८६

(३७) २, ३, ०, २, ३, ३ या अंकापासुन ६ अंकी किती संख्या तयार होतील ?

(३८) प्राध्यापकाच्या एका जागेकरिता ३ उमेदवार आहेत. त्यांची निवड ५ माणसांच्या मताने व्हावयाची असल्यास किती प्रकारांनी मतदान केलें जाईल ?

(३९) एका वर्ण-कुलपाला ४ वलयें असून प्रत्येक वलयावर ८ निरनिराळे वर्ण आहेत. ह्या वर्णाच्या द्वारें निरनिराळे किती सांकेतिक शब्द तयार होतील ?

(४०) एका निवडणूकीसाठी ५ उमेदवार असून ३ च निवडावयाचे आहेत. प्रत्येक मतदाराला तीन मतें आहेत. तर तो ती किती प्रकारांनी देऊं शकेल ?

(४१) खालील नाणीं घेऊन किती रकमा करतां येतील तें काढा. १ रुपया, १ अधेली, १ पावली, १ चवली आणि १ आणेली.

(४२) ३ लाल, २ निळ्या, २ पिवळ्या, १ हिरवी, १ पांढरी आणि १ जांभळी अशा पताकांतून ४ पताकांचे (१) प्रचरण तसेंच (२) विन्यास किती प्रकारांनी होतील ?

(४३) द्वादशभुजाचे कोणबिंदू सांधून किती त्रिकोण तयार होतात ?

(४४) एका समतलांत न बिंदू असून त्यांपैकी केवळ म बिंदूच एका सरळ रेषेंत आहेत. तर

(१) निरनिराळया सर्व रेषा आणि

(२) निरनिराळे सर्व त्रिकोण किती येतील ते काढा.

[कलकत्ता १९२८

(४५) एका रेल्वेवर स स्टेशनें आहेत. एक आगगाडी कोणत्याहि लागोपाठच्या स्टेशनवर न थांबतां, यांपैकी कोणत्याहि तीन स्टेशनांवर

$\frac{१}{६}$ (स – २) (स – ३)(स – ४) प्रकारें थांबते हें दाखवा.

(४६) एका रेल्वेवर १० स्टेशनें आहेत. प्रत्येक स्टेशनपासून इतर सर्व स्टेशनचीं तिसऱ्या वर्गाचीं तिकिटें देतां येत असल्यास त्या तिकिटांचे किती प्रकार होतील ते काढा.

(४७) एका दूरलिखसाधित्राला ५ भुजा आहेत. त्यांपैकी प्रत्येक विश्रामस्थितीसकट चार स्पष्ट सिग्नल देऊं शकते. तर सिग्नलांची एकंदर संख्या १०२३ आहे हें दाखवा.

पुन्हा $१+२=(१)+२$

$$=\frac{१(१+१)}{२}+२$$ [(अ) चा उपयोग करून

$$=\frac{२(२+१)}{२}$$ ......................(इ)

म्हणून स = २ करिता विधान (अ) सत्य आहे.

पुन्हा $१+२+३=(१+२)+३$

$$=\frac{२(२+१)}{२}+३$$ [(इ) चा उपयोग करून

$$=\frac{३(३+१)}{२}$$

म्हणून स = ३ करिता विधान (अ) सत्य आहे.

ह्यावरून, प्रत्येक फल सिद्ध करण्यास त्या पूर्वीच्या फलाचा उपयोग केला आहे आणि म्हणून प्रत्येक फलसिद्धि पूर्वीच्या फलावर अवलंबून आहे हे लक्षांत येईल.

आता स च्या प ह्या विशिष्ट अर्हेकरिता विधान (अ) सत्य आहे असें गृहीत धरल्यास तें स = (प + १) करिता सत्य आहे हें सिद्ध करूं.

समजा

$$१+२+३+\dots+प=\frac{प(प+१)}{२}$$

हा संबंध सत्य आहे.

दोन्ही बाजूंत (प + १) मिळवा.

$$\therefore १+२+३+\dots+प+(प+१)=\frac{प+(प+१)}{२}+(प+१)$$

$$=\frac{(प+१)(प+२)}{२}$$

म्हणून स=प+१ करिताहि विधान सत्य आहे हें दिसून येतें.

ह्यावरून, स=प करिता जर आपली मानना (supposition) सत्य असेल तर स=प+१ करिताहि ती सत्य असते.

ह्यावरुन असा निष्कर्ष काढतां येतो की, स च्या कोणत्याहि विशिष्ट अर्हेकरिता विधान (अ) सत्य असेल तर स च्या आगामी (next) उच्चत्तर अर्हेकरितांहि तें सत्य असतें.

आता स=१ करिता आपण विधान (अ) सिद्ध केलें आहेच. म्हणून स=२ करिताहि तें सत्य आहे.

स=२ करिता विधान (अ) सत्य आहे.

म्हणून स=३ करिताहि तें सत्य आहे.

स=३ करिता विधान (अ) सत्य आहे.

म्हणून स=४ करिताहि सत्य आहे.

पुन्हा स=४ करिता विधान (अ) सत्य आहे.

म्हणून तें स=५ करिताहि सत्य आहे.

ह्या विधीचा सतत प्रयोग करुन हें विधान स च्या दिलेल्या धन पूर्णांक अर्हांकरिता सत्य आहे हें सिद्ध होतें.

उदाहरण २— स हा कोणताहि धन पूर्णांक असतांना

य$^{स}$ − र$^{स}$ चा (य − र) हा एक अवयव आहे हें विधान गणितीय अनुमानाच्या पद्धतीनें सिद्ध करा.

प्रथमतः स = १ असतांना य$^{स}$ − र$^{स}$ चा (य − र) हा अवयव आहे हें स्पष्ट आहे. ...............(१)

म्हणून स = १ करिता वरील विधान सत्य आहे.

जेव्हा स = २, तेव्हा य$^{स}$ − र$^{स}$ = य$^{२}$ − र$^{२}$

आता य$^{२}$ − र$^{२}$ = य(य − र) + र(य − र)

उजव्या पक्षांत (य − र) हा दोन्ही पदांचा अवयव आहे. म्हणून तो (य$^{२}$ − र$^{२}$) चाहि अवयव आहे. ...............(२)

म्हणून स = २ करिता वरील विधान सत्य आहे.

आता स = ३ असतांना

य$^{३}$ − र$^{३}$ = यय$^{२}$ − यर$^{२}$ + यर$^{२}$ − र × र$^{२}$

= य(य$^{२}$ − र$^{२}$) + र$^{२}$(य − र)

(१) आणि (२) वरून य$^{२}$ − र$^{२}$ आणि (य − र) ह्यांचा (य − र) हा अवयव आहे. त्यावरून (य − र) हा य$^{३}$ − र$^{३}$ चाहि अवयव आहे.

म्हणून स = ३ करिता वरील विधान सत्य आहे.

आता स च्या प ह्या विशिष्ट अर्हेकरिता वरील विधान सत्य आहे असें गृहीत धरल्यास तें स = प + १ करिताहि सत्य आहे हें आपण दाखवूं.

आता य$^{प+१}$ − र$^{प+१}$ = यय$^{प}$ − यर$^{प}$ + यर$^{प}$ − रर$^{प}$

= य[य$^{प}$ − र$^{प}$] + र$^{प}$[य − र]

$य^{प} - र^{प}$ चा $(य - र)$ हा अवयव आहे हें आपण गृहीत धरलें आहे.

उजव्या पक्षांतील दोन्ही पदांत $(य - र)$ साधारण असल्यामुळे $(य^{प+१} - र^{प+१})$ चा $(य - र)$ अवयव आहे.

ह्यांवरून, $(य - र)$ हा $(य^{प} - र^{प})$ चा अवयव आहे ही आपली मानना जर सत्य असेल तर तो $(य^{प+१} - र^{प+१})$ चाहि अवयव आहे.

ह्यावरून असा निष्कर्ष काढतां येतो की, स च्या कोणत्याहि विशिष्ट अंहकरिता वरील विधान सत्य असेल तर स च्या आगामी उच्चतर अंहकरिताहि तें सत्य आहे.

आता स = १ करिता आपण वरील विधान सिद्ध केलें आहेच.

म्हणून स = २ करिताहि तें सत्य आहे.

स = २ करिता तें सत्य आहे.

म्हणून स = ३ करिताहि तें सत्य आहे.

अर्थात् $(य - र)$ हा $(य^{३} - र^{३})$ चा अवयव आहे.

स = ३ करिता वरील विधान सत्य आहे.

म्हणून स = ४ करिताहि तें सत्य आहे. अर्थात् $(य - र)$ हा $(य^{४} - र^{४})$ चाहि अवयव आहे.

स = ४ करिता विधान सत्य आहे म्हणून स = ५ करिताहि तें सत्य आहे. अर्थात् $(य - र)$ हा $(य^{५} - र^{५})$ चाहि अवयव आहे.

ह्या विधीचा सतत प्रयोग करून स च्या घन पूर्णांक

अहंकरिता $(य^स - र^स)$ चा $(य - र)$ हा अवयव आहे हें विधान सत्य आहे हें दाखवितां येतें.

## प्रश्नसंग्रह १५

गणितीय अनुमान पद्धतीने सिद्ध करा—

(१) $१^२+२^२+३^२+\ldots\ldots+स^२=\dfrac{स(स+१)(२स+१)}{६}$

(२) $१^३+२^३+३^३+\ldots\ldots+स^३=\left[\dfrac{स(स+१)}{२}\right]^२$

(३) $१+३+५+\ldots\ldots\ldots+(२स-१)=स^२$

(४) $१\times२+२\times३+३\times४+\ldots\ldots\ldots+स(स+१)$

$=\dfrac{स(स+१)(स+२)}{३}$

(५) $क+(क+च)+(क+२च)+\ldots+[क+(स-१)च]$

$=\dfrac{स}{२}\left[२क+(स-१)च\right]$

(६) $क+कन+कन^२+\ldots\ldots\ldots+कन^{स-१}=\dfrac{क[१-न^स]}{१-न}$

(७) स च्या विषम धन पूर्णांक अहांकरिता $य^स+र^स$ ह्या पदसंहतीचा $(य+र)$ हा अवयव आहे.

(८) $\dfrac{१}{१\times२}+\dfrac{१}{२\times३}+\dfrac{१}{३\times४}+\ldots\ldots+\dfrac{१}{स(स+१)}=\dfrac{स}{स+१}$

# प्रकरण अकरावें

## द्विपद प्रमेय

(binomial theorem)

### धन पूर्णांक घात

११.१ प्रत्यक्ष गुणाकार करून येणारीं खालील गुणनफलें विचारांत घ्या.

(अ) $(य + क_1)(य + क_2) = य^2 + (क_1 + क_2) य + क_1 क_2$

(आ) $(य + क_1)(य + क_2)(य + क_3)$

$$= [य^2 + (क_1 + क_2) य + क_1 क_2] \times [य + क_3]$$

$$= य^3 + (क_1 + क_2 + क_3) य^2 + (क_1 क_2 + क_2 क_3 + क_1 क_3) य + क_1 क_2 क_3$$

(इ) $(य + क_1)(य + क_2)(य + क_3)(य + क_4)$

$$= [य^3 + (क_1 + क_2 + क_3) य^2 + (क_1 क_2 + क_2 क_3 + क_1 क_3) य + क_1 क_2 क_3] \times (य + क_4)$$

$$= य^{४} + (क_{१} + क_{२} + क_{३} + क_{४})\, य^{३}$$

$$+ [क_{१}क_{२} + क_{१}क_{३} + क_{१}क_{४} + क_{२}क_{३} + क_{२}क_{४} + क_{३}क_{४}]\, य^{२}$$

$$+ [क_{१}क_{२}क_{३} + क_{१}क_{२}क_{४} + क_{१}क_{३}क_{४} + क_{२}क_{३}क_{४}]\, य$$

$$+ क_{१}क_{२}क_{३}क_{४}$$

जेव्हा अवयवांची संख्या अल्प असते तेव्हाच प्रत्यक्ष गुणाकार करून गुणनफल काढणें सुकर असतें. परंतु अव-यवांची संख्या फार मोठी असल्यास प्रत्यक्ष गुणाकार करणें अतिशय त्रासदायक होतें.

हा त्रास दूर करण्याकरिता प्रत्यक्ष गुणाकार न करतां गुणनफल काढण्याची रीति आपण शोधून काढली पाहिजे. (३) या फलाच्या दक्षिण पक्षांतील पदांचे निरीक्षण करा. तें चार द्विपद अवयवांचा गुणाकार आहे. त्याच्या दक्षिण पक्षाकडे पाहिल्यास असें दिसून येतें की सर्व संभाव्य प्रकारें दिलेल्या सर्व अवयवांतून प्रत्येकीं एकच पद घेऊन आणि त्या सर्व पदांचा गुणाकार करून जीं पदें निर्माण होतात त्यांचा योग म्हणजेच दक्षिण पक्षांतील पदसहति होय.

आता प्रत्येक पदांतील गुणाकारांचा विचार करा.

(१) चारहि अवयवांतून य घेतल्यास त्यांचा गुणाकार $य^{४}$ येतो. अशाप्रकारें $य^{४}$ हें प्रथम पद होतें.

(२) सर्व संभाव्य प्रकारें निवडलेल्या तीन अवयवांतून

प्रत्येकीं य घेऊन आणि उरलेल्या एका अवयवांतील $फ_1$, $फ_2$, $फ_3$ व $फ_4$ यांपैकी एक राशि घेऊन येणाऱ्या त्यांच्या गुणाकारांत $य^3$ आहे. अशा प्रकारें $फ_1 य^3$, $फ_2 य^3$, $फ_3 य^3$ आणि $फ_4 य^3$ हीं पदें प्राप्त होतात. यांचा योग करून $(फ_1 + फ_2 + फ_3 + फ_4)य^3$ हें गुणनफलांतील दुसरें पद प्राप्त होतें.

(३) सर्व संभाव्य प्रकारें निवडलेल्या दोन अवयवांतून य आणि उरलेल्या दोन अवयवांतून $फ_1$, $फ_2$, $फ_3$ आणि $फ_4$ यांपैकीं दोन राशी घेऊन येणाऱ्या त्यांच्या गुणाकारांत $य^2$ आहे. हे संभाव्य प्रकार $^4च_2$ आहेत. या सर्व गुणाकारांचा योग करून तिसरें पद प्राप्त होतें.

(४) सर्व संभाव्य प्रकारें निवडलेल्या एका अवयवांतून य आणि उरलेल्या तीन अवयवांतून $फ_1$, $फ_2$, $फ_3$ आणि $फ_4$ यांपैकी तीन राशी घेऊन येणाऱ्या त्यांच्या गुणाकारांत य आहे. ह्याचे संभाव्य प्रकार $^4च_3$ आहेत. या सर्व गुणाकारांचा योग करून चवथें पद प्राप्त होतें.

(५) पांचवें पद य-विरहित असून तें $फ_1$, $फ_2$, $फ_3$, $फ_4$ यांचा गुणाकार आहे.

वर सांगितलेल्या रीतीनें पुढील उदाहरणें सोडविलीं आहेत.

उदाहरण १— गुणाकार करा—

$$(य-१)(य+३)(य+४)(य-८)$$

$$\text{इष्ट गुणाकार} = य^4 + [-१+३+४-८]य^3$$
$$+[(-१)(३)+(-१)(४)+(-१)(-८)$$

$$+३\times४+३(-८)+४(-८)]य^२$$
$$+[(-१)(३)(४)+(-१)(४)(-८)$$
$$+३\times४(-८)+(-१)(३)(-८)]य$$
$$+(-१)(३)(४)(-८)$$
$$=य^४-२य^३-४३य^२-५२य+९६$$

उदाहरण २—

$(य+३)(य-५)(य+१)(य+२)(य-८)$ यांच्या गुणाकारांतील $य^२$ चा गुणक काढा.

प्रत्येक संभाव्य प्रकारें दोन अवयवांतून य आणि उरलेल्या तीन अवयवांतून संख्यात्मक राशी घेऊन येणाऱ्या त्यांच्या गुणाकारांत $य^२$ आहे. यावरून $य^२$ चा गुणक ३, −५, १, २, −८ या पांच संख्यांतून सर्व संभाव्य प्रकारें कोणत्याहि तिघांच्या गुणाकारांचा योग आहे.

म्हणून इष्ट गुणक

$$=३(-५)१+३(-५)२+३(-५)(-८)+३\times१\times२$$
$$+३\times१(-८)+३\times२(-८)+(-५)(१)(२)$$
$$+(-५)१(-८)+१\times२(-८)+(-५)२(-८)$$
$$=-१५-३०+१२०+६-२४-४८-१०+४०-१६+८०$$
$$=१०३$$

११.२ स द्विपद अवयवांचा गुणाकार—

$(य+क_१)(य+क_२)(य+क_३)$ ............ $(य+क_स)$ हा गुणाकार विचारांत घ्या.

स द्विपद-अवयवांचें गुणनफल काढण्याकरिता पूर्वानुच्छेदांत, चार अवयवांकरिता दिलेल्या रीतीचाच आपण उपयोग करूं.

स द्विपद-अवयवांचा संपूर्ण गुणाकार हा सर्व संभाव्य प्रकारें स अवयवांतून प्रत्येकीं एकच पद घेऊन येणाऱ्या त्यांच्या गुणाकारांच्या योगासमान असल्यामुळे अंतिम फलांत प्रत्येक पदाची विमा (dimension) स आहे.

आता, य चा उच्चतम घात असणारें पद $य^{स}$ आहे. हें पद प्रत्येक अवयवांतून य घेऊन त्यांच्या गुणाकारासमान येतें.

सर्व संभाव्य प्रकारें निवडलेल्या (स – १) अवयवांतून प्रत्येकीं य; आणि $क_1$, $क_2$, $क_3$ . ... आणि $क_{स}$ यांपैकी कोणतीहि एक राशि घेऊन येणाऱ्या त्यांच्या गुणाकारांत $य^{स-1}$ आहे. म्हणून अंतिम गुणाकारांत $य^{स-1}$ चा गुणक $क_1$, $क_2$, $क_3$ . . . . आणि $क_{स}$ यांच्या योगासमान येतो. ह्या योगाचें $यो_1$ ने अभिधान करा. $यो_1$ मध्ये एकंदर $^{स}च_1$ पदें आहेत हें सहज लक्षांत येण्यासारखें आहे.

सर्व संभाव्य प्रकारें निवडलेल्या (स – २) अवयवांतून य; आणि $क_1$, $क_2$, $क_3$ ...... आणि $क_{स}$ यांपैकी कोणत्याहि दोन राशी घेऊन येणाऱ्या त्यांच्या गुणाकारांत $य^{स-2}$ चा गुणक आहे. म्हणून अंतिम गुणाकारांत $य^{स-2}$ चा गुणक $क_1$, $क_2$, $क_3$, ......आणि $क_{स}$ यांमधून सर्व संभाव्य प्रकारें निवडलेल्या दोन राशी घेऊन येणाऱ्या त्यांच्या गुणाकारांच्या

योगासमान येतो. ह्या योगाचें $यो_२$ ने अभिधान करा. $यो_२$ मधील एकंदर पदांची संख्या $^{स}च_२$ आहे.

आता, आपण सामान्य पद लिहूं.

समजा, सामान्य पदांत य चा घात (स − न) आहे.

म्हणून, सर्व संभाव्य प्रकारें निवडलेल्या (स − न) अवयवांतून प्रत्येकीं य; आणि $क_१$, $क_२$, $क_३$ …… आणि $क_स$ यांपैकी कोणत्याहि न राशी घेऊन येणाऱ्या त्यांच्या गुणाकारांत $य^{स-न}$ आहे. म्हणून $क_१$, $क_२$, $क_३$, ……… आणि $क_स$ यांमधून सर्व संभाव्य प्रकारें निवडलेल्या न राशी घेऊन येणाऱ्या त्यांच्या गुणाकारांचा योग $य^{स-न}$ चा गुणक आहे. ह्या योगाचें $यो_न$ ने अभिधान करा. $यो_न$ मधील एकंदर पदांची संख्या $^{स}च_न$ आहे.

अंत्यपद य- विरहित असून तें $क_१$, $क_२$, $क_३$…… आणि $क_स$ यांचा गुणाकार आहे. त्याचें $यो_स$ ने अभिधान करा.

आता, हा संपूर्ण गुणाकार य च्या अवरोहि घातांत लिहिल्यास

$$
\begin{aligned}
(य+क_१)(य+क_२)\ldots\ldots(य+क_स) \\
= य^{स} + (क_१ + क_२ + \ldots\ldots क_स)य^{स-१} \\
+ (क_१क_२ + क_१क_३ + \ldots\ldots)\, य^{स-२} \\
+ (क_१क_२क_३ + क_१क_२क_४ + \ldots\ldots)य^{स-३} \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ (क_१क_२क_३\ldots\ldots क_न + \ldots\ldots)य^{स-न} \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$+(\text{क}_1\text{क}_2\text{क}_3\ldots\text{क}_{\text{स}-1}+\ldots)\text{य}+(\text{क}_1\text{क}_2\text{क}_3\ldots\text{क}_{\text{स}})$$

$$=\text{य}^{\text{स}}+\text{यो}_1\text{य}^{\text{स}-1}+\text{यो}_2\text{य}^{\text{स}-2}+\ldots\ldots+\text{यो}_{\text{न}}\text{य}^{\text{स}-\text{न}}+\ldots\ldots+\text{यो}_{\text{स}-1}\text{य}+\text{यो}_{\text{स}}$$

११.२१ वरील अनुच्छेदांत $\text{क}_1, \text{क}_2, \text{क}_3\ldots\ldots\text{क}_{\text{स}}$ ह्या राशी प्रत्येकीं क च्या समान घ्या.

म्हणजे $\text{यो}_1, \text{यो}_2, \text{यो}_3\ldots\ldots\text{यो}_{\text{न}},\ldots\text{यो}_{\text{स}}$ यांच्या अर्हा क्रमशः ${}^{\text{स}}\text{च}_1\text{क}$, ${}^{\text{स}}\text{च}_2\text{क}^2$, ${}^{\text{स}}\text{च}_3\text{क}^3,\ldots\ldots$ ${}^{\text{स}}\text{च}_{\text{न}}\text{क}^{\text{न}},\ldots\ldots$ ${}^{\text{स}}\text{च}_{\text{स}}\text{क}^{\text{स}}$ होतात.

म्हणून (य+क) च्या समान स द्विपद अवयवांचा गुणाकार

$$(\text{य}+\text{क})^{\text{स}}=\text{य}^{\text{स}}+{}^{\text{स}}\text{च}_1\,\text{कय}^{\text{स}-1}+{}^{\text{स}}\text{च}_2\text{क}^2\text{य}^{\text{स}-2}+\ldots\ldots+{}^{\text{स}}\text{च}_{\text{न}}\text{क}^{\text{न}}\text{य}^{\text{स}-\text{न}}+\ldots\ldots+\text{क}^{\text{स}}$$

वरील फलांत एकंदर पदांची संख्या (स+१) आहे हें सहज दिसून येईल.

वर दिलेल्या $(\text{य}+\text{क})^{\text{स}}$ च्या विस्ताराला धन पूर्णांक घातांचा द्विपद विस्तार म्हणतात.

११.२२ आता $(\text{य}+\text{क})^{\text{स}}$ आणि त्याचा विस्तार यांतील य आणि क यांचें व्यतिहरण केलें तर

$$(\text{क}+\text{य})^{\text{स}}=\text{क}^{\text{स}}+{}^{\text{स}}\text{च}_1\text{यक}^{\text{स}-1}+{}^{\text{स}}\text{च}_2\text{य}^2\text{क}^{\text{स}-2}+\ldots\ldots+{}^{\text{स}}\text{च}_{\text{न}}\text{य}^{\text{न}}\text{क}^{\text{स}-\text{न}}+\ldots\ldots+\text{य}^{\text{स}}\ \ldots\ldots(१)$$

ह्या विस्ताराचें निरीक्षण केलें तर तो य च्या आरोही घातांत आहे असें दिसून येईल.

(१) मध्ये क = १ ठेवल्यास

$$(१+य)^{स} = १ + {}^{स}च_{१}य + {}^{स}च_{२}य^{२} + {}^{स}च_{३}य^{३} + \dots$$
$$+ {}^{स}च_{न}य^{न} + \dots + {}^{स}च_{स-१}य^{स-१} + य^{स}$$

$(१+य)^{स}$ च्या विस्तारांत ${}^{स}च_{१}$, ${}^{स}च_{२}$, ${}^{स}च_{३}$......... यांना द्विपद गुणक म्हणतात.

$प_{न+१}$ ने सामान्य पदाचें अभिधान केल्यास

$$प_{न+१} = {}^{स}च_{न}य^{न}$$
$$= \frac{स(स-१)(स-२)\dots\dots(स-न+१)}{१\times२\times३\dots\dots\dots न}य^{न}$$
$$= \frac{\underline{|स}}{\underline{|न}\;\underline{|स-न}}य^{न}$$

यावरून

$$(१+य)^{स} = १ + सय + \frac{स(स-१)}{\underline{|२}}य^{२} + \frac{स(स-१)(स-२)}{\underline{|३}}य^{३}$$
$$+ \dots + \frac{स(स-१)(स-२)\dots(स-न+१)}{\underline{|न}}य^{न}$$
$$+ \dots + य^{स}$$

हें अतिशय सरळ रूप आहे.

आता, $(य+र)^{स}$ सारख्या स-घातीय द्विपद राशीचा विस्तार, तिचें रूपांतर ज्या द्विपद राशीचें आद्यपद १ आहे अशा स-घातीय द्विपद राशींत करून नंतर वर दिलेल्या

द्विपद प्रमेयाच्या सरलतम रूपाचा उपयोग करून काढतां येतें हें पुढील उदाहरणावरून स्पष्ट होईल.

उदाहरण १— $(य+र)^{म}$ चा विस्तार काढा.

$$(य+र)^{म}=\left[\; य\left(१+\frac{र}{य}\right)\;\right]^{स}$$

$$\frac{र}{य}=ल \quad \text{घेऊन}$$

$$(य+र)^{स}=य^{स}(१+ल)^{स}$$
$$=य^{स}[१+{}^{स}च_{१}ल+{}^{स}च_{२}ल^{२}+\ldots+{}^{स}च_{न}ल^{न}+\ldots$$
$$\ldots+{}^{स}च_{स}ल^{स}]$$

$$=य^{स}\left[१+{}^{स}च_{१}\;\frac{र}{य}\;+{}^{स}च_{२}\;\frac{र^{२}}{य^{२}}\;+\ldots\ldots\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+{}^{स}च_{न}\;\frac{र^{न}}{य^{न}}\;+\ldots+{}^{स}च_{स}\;\frac{र^{स}}{य^{स}}\right]$$

$$=य^{म}+{}^{स}च_{१}\;रय^{स-१}+{}^{स}च_{२}\;र^{२}य^{\,स-२}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots+{}^{स}च_{न}\;र^{न}य^{\,स-न}+\ldots+{}^{स}च_{स}\;र^{स}$$

उदाहरण २—

$(य+क)^{७}$ चा विस्तार करा.

(११.२१) वरून

$$(य+क)^{७}=य^{७}+{}^{७}च_{१}कय^{६}+{}^{७}च_{२}क^{२}य^{५}+{}^{७}च_{३}क^{३}य^{४}+{}^{७}च_{४}क^{४}य^{३}+{}^{७}च_{५}क^{५}य^{२}+{}^{७}च_{६}क^{६}य+{}^{७}च_{७}क^{७}$$

$= य^7 + 7 क य^6 + 21 क^2 य^5 + 35 क^3 य^4$
$+ 35 क^4 य^3 + 21 क^5 य^2 + 7 क^6 य + क^7$

उदाहरण ३—

$(2य - र)^5$ चा विस्तार काढा.

$(य + क)^न$ शी $(2य - र)^5$ ची तुलना केल्यास असें दिसून येतें की द्विपदांत य ऐवजी २य आणि क ऐवजी $-र$ आहे.

पहिल्या उदाहरणांप्रमाणे विस्तार केल्यास

$$(2 य - र)^5 = (2य)^5 + {}^5च_1 (-र)(2य)^4 + {}^5च_2 (-र)^2 (2य)^3 + {}^5च_3 (-र)^3 (2य)^2 + {}^5च_4 (-र)^4 (2य) + {}^5च_5 (-र)^5$$

$$= 32 य^5 - 80 रय^4 + 80 र^2 य^3 - 40 र^3 य^2 + 10 र^4 य - र^5$$

उदाहरण ४—

$(य + \sqrt{3})^5 + (य - \sqrt{3})^5$ याची अर्हा काढा.

$$(य + \sqrt{3})^5 + (य - \sqrt{3})^5$$

$$= [य^5 + {}^5च_1 (\sqrt{3}) य^4 + {}^5च_2 (\sqrt{3})^2 य^3 + {}^5च_3 (\sqrt{3})^3 य^2 + {}^5च_4 (\sqrt{3})^4 य + {}^5च_5 (\sqrt{3})^5]$$

$$+ [य^5 + {}^5च_1 (-\sqrt{3}) य^4 + {}^5च_2 (-\sqrt{3})^2 य^3 + {}^5च_3 (-\sqrt{3})^3 य^2 + {}^5च_4 (-\sqrt{3})^4 य + {}^5च_5 (-\sqrt{3})^5]$$

$$= 2 य^5 + 2\,{}^5च_2 (\sqrt{3})^2 य^3 + 2\,{}^5च_4 (\sqrt{3})^4 य$$

$$= 2 य^5 + 60 य^3 + 90 य$$

११.३ $(\text{य}+\text{क})^{\text{स}}$ च्या विस्तारांतील कोणतेंहि पद काढणें.

$$(\text{य}+\text{क})^{\text{स}} = \text{य}^{\text{स}} + {}^{\text{स}}\text{च}_{\text{१}}\,\text{क}\,\text{य}^{\text{स}-\text{१}} + \ldots + {}^{\text{स}}\text{च}_{\text{न}}\text{क}^{\text{न}}\text{य}^{\text{स}-\text{न}} + \ldots\ldots + {}^{\text{स}}\text{च}_{\text{स}-\text{१}}\text{क}^{\text{स}-\text{१}}\text{य} + \text{क}^{\text{स}}$$

विस्तारांतील पहिलें पद $\text{य}^{\text{स}}$ अथवा ${}^{\text{स}}\text{च}_{\text{०}}\text{य}^{\text{स}}$

दुसरें पद ${}^{\text{स}}\text{च}_{\text{१}}\text{क}\,\text{य}^{\text{स}-\text{१}}$

तिसरें पद ${}^{\text{स}}\text{च}_{\text{२}}\text{क}^{\text{२}}\text{य}^{\text{स}-\text{२}}$

चवथें पद ${}^{\text{स}}\text{च}_{\text{३}}\text{क}^{\text{३}}\text{य}^{\text{स}-\text{३}}$

..............................

या पदांच्या निरीक्षणावरून असें दिसून येतें की

(१) च चा पादांक (suffix) पदाच्या क्रमांकापेक्षा १ ने कमी आहे.

(२) क चा घात च च्या पादांकासमान आहे.

(३) क आणि य यांच्या घातांचा योग द्विपदाच्या घातासमान आहे.

यावरून (त + १) व्या पदाचें अभिधान $\text{प}_{\text{त}+\text{१}}$ नें केलें तर

$$\text{प}_{\text{त}+\text{१}} = {}^{\text{स}}\text{च}_{\text{त}}\,\text{क}^{\text{त}}\,\text{य}^{\text{स}-\text{त}}$$

११.३१ $(\text{१}+\text{य})^{\text{स}}$ च्या विस्तारांत आरंभ आणि अंत यांपासून समदूर असणाऱ्या पदांतील गुणक समान असतात.

$$(\text{१}+\text{य})^{\text{स}} = \text{१} + {}^{\text{स}}\text{च}_{\text{१}}\,\text{य} + {}^{\text{स}}\text{च}_{\text{२}}\,\text{य}^{\text{२}} + \ldots + {}^{\text{स}}\text{च}_{\text{न}}\,\text{य}^{\text{न}} + \ldots\ldots + {}^{\text{स}}\text{च}_{\text{स}-\text{१}}\,\text{य}^{\text{स}-\text{१}} + \text{य}^{\text{स}}$$

$(१+य)^{स}$ च्या विस्तारांत पदांची संख्या $(स+१)$ असते हें आपण पाहिलेंच आहे.

आरंभापासून त व्या पदांतील गुणक $= {}^{स}च_{त-१}$

अंतापासून त वें पद = आरंभापासून $(स+२-त)$ वें पद.

म्हणून $(स+२-त)$ व्या पदांतील गुणक

$$= {}^{स}च_{स+१-त}$$
$$= {}^{स}च_{स-(स+१-त)}$$
$$= {}^{स}च_{त-१}$$

म्हणून आरंभ आणि अंत यांपासून समदूर असणाऱ्या पदांतील गुणक समान असतात.

११.४ कांहीं सोडविलेलीं उदाहरणें.

उदाहरण १— $(य-र)^{६}$ च्या विस्तारांतील चवथें पद काढा.

$(य-र)^{६}$ च्या विस्तारांतील चवथें पद

$$= {}^{६}च_{३}(-र)^{३}य^{३}$$
$$= -\frac{६\times५\times४}{१\times२\times३}र^{३}य^{३}$$
$$= -२०र^{३}य^{३}$$

उदाहरण २— $(य-क)^{१६}$ च्या विस्तारांतील १३ वें पद काढा.

$(य-क)^{१६}$ च्या विस्तारांतील १३ वें पद

$$= {}^{१६}च_{१२}(-क)^{१२}य^{४}$$
$$= {}^{१६}च_{४}क^{१२}य^{४}$$

$$= \frac{१६ \times १५ \times १४ \times १३}{१ \times २ \times ३ \times ४} क^{१२} य^{४}$$

$$= १८२० \; क^{१२} य^{४}$$

उदाहरण ३— $\left(य^{२} - \frac{३}{य}\right)^{१५}$ च्या विस्तारांत $य^{१८}$ चा गुणक काढा.

समजा $य^{१८}$, (त + १) व्या पदांत आहे.

आता, $\left(य^{२} - \frac{३}{य}\right)^{१५} = य^{३०}\left(१ - \frac{३}{य^{३}}\right)^{१५}$

आता, $\left(१ - \frac{३}{य^{३}}\right)^{१५}$ चा विस्तार करून त्यांतील प्रत्येक पदास $य^{३०}$ ने गुणा.

$$प_{त+१} = य^{३०} \left[\left(१ - \frac{३}{य^{३}}\right)^{१५} \text{च्या विस्तारांतील (त + १) वें पद}\right]$$

$$= य^{३०} \times {}^{१५}च_{त} \left(-\frac{३}{य^{३}}\right)^{त}$$

$$= (-३)^{त} \times {}^{१५}च_{त} \times य^{३० - ३त}$$

या पदांत य चा घात १८ आहे असें आपण गृहीत धरलें आहे.

म्हणून $३० - ३त = १८$

किंवा $त = ४$

$$\text{इष्ट गुणक} = (-3)^4 \times {}^{15}\text{च}_4$$

$$= 3^4 \times {}^{15}\text{च}_4$$

$$= \frac{81 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

$$= 110565$$

उदाहरण ४— $\left(य + \frac{ग}{य^2}\right)^{स}$ च्या विस्तारांत $य^{त}$ चा गुणक काढा.

समजा, $य^{त}$, $\left(य + \frac{ग}{य^2}\right)^{स}$ च्या विस्तारांतील $(ठ+1)$ च्या पदांत आहे.

$$\text{आता } \left(य + \frac{ग}{य^2}\right)^{स} = य^{स}\left(1 + \frac{ग}{य^3}\right)^{स}$$

$\left(य + \frac{ग}{य^2}\right)^{स}$ च्या विस्तारांत

$$प_{ठ+1} = य^{स}\left[\left(1 + \frac{ग}{य^3}\right)^{स} \text{ च्या विस्तारांत } प_{ठ+1} \text{वें पद}\right]$$

$$= य^{स} \times {}^{स}\text{च}_{ठ}\left(\frac{ग}{य^3}\right)^{ठ}$$

$$= {}^{स}\text{च}_{ठ}\, य^{स-3ठ} \times ग^{ठ}$$

या पदांत य चा घांत त आहे हें आपण गृहीत धरलें आहे.

म्हणून स − ३ठ = त

किंवा $ठ = \dfrac{स - त}{३}$

म्हणून इष्ट गुणक $= {}^{स}च_{\frac{स-त}{३}}\; ग^{\frac{स-त}{३}}$

$$= \frac{\lfloor स}{\lfloor \frac{स-त}{३} \; \lfloor \frac{२स+त}{३}} ग^{\frac{स-त}{३}}$$

## प्रश्नसंग्रह १६

(१) विस्तार करा—

(य − ३) (य + ४) (य − ८) (य + ७)

(२) (क) (य − २) (य + ३) (य − ५) (य + ९) या गुणाकारांतील $य^{३}$ चा गुणक काढा.

(ख) (य + १) (य + २) (य + ३) (य − ४) (य − ५) × (य − ६) या गुणाकारांतील $य^{४}$ चा गुणक काढा.

(३) विस्तार करा—

(१) $(य + २)^{५}$; (२) $(२य + ३र)^{६}$;

(३) $(५ - ४य)^{४}$; (४) $\left(१ - \dfrac{१}{य}\right)^{६}$

(५) $\left(य^{२}+\frac{३क}{य}\right)^{५}$, (६) $\left(३य-\frac{५}{य^{२}}\right)^{५}$

(४) खालील द्विपद विस्तारांतील इष्ट पदें लिहून त्यांना सरळ रूप द्या.

(अ) $(३क^{२}-७य^{२})^{८}$ यांमधील ५वें पद

(आ) $\left(\frac{क}{य}+\frac{य}{क}\right)^{११}$ यांमधील ९वें पद

(इ) $\left(\frac{य}{क}-\frac{क}{य}\right)^{१०}$ यांमधील ४थें पद

[कलकत्ता १८८८

(ई) $(२य^{\frac{१}{२}}-र^{\frac{१}{३}})^{२०}$ यांमधील १९ वें पद

[कलकत्ता १८७०

(५) $(य-य^{२})^{१०}$ च्या विस्तारांतील $य^{१५}$ चा गुणक काढा. [कलकत्ता १९२६

(६) $(क^{४}-खय^{३})^{११}$ च्या विस्तारांतील $य^{१०}$ आणि $य^{१८}$ यांचे गुणक काढा. [कलकत्ता १८७६

(७) $(य-२र)^{१३}$ च्या विस्तारांतील $य^{११}$ चा गुणक काढा. [कलकत्ता १८८३

(८) $\left(य+\frac{ग^{३}}{य^{३}}\right)^{१०}$ च्या विस्तारांतील $\frac{१}{य^{२}}$ चा गुणक काढा.

(९) $\left(३य-\frac{१}{३य}\right)^{१०१}$ च्या विस्तारांतील $य^{३१}$ चा गुणक काढा.

(१०) $\left(य - \frac{३क^{३}}{य^{२}}\right)^{२स}$ च्या विस्तारांतील $य^{स}$ चा गुणक काढा.

(११) $(य - य^{-१})^{३स}$ च्या विस्तारांतील $(२स + १)$ वें पद काढा.

(१२) $(१ + य)^{२स}$ च्या विस्तारांतील $य^{स}$ चा गुणक $(१ + य)^{२स-१}$ च्या विस्तारांतील $य^{स}$ च्या गुणकाच्या दुप्पट आहे हें दाखवा.

(१३) $(१ + य)^{२स}$ च्या विस्तारांतील मध्यपद

$$\frac{१ \times ३ \times ५ \ldots\ldots (२स - १)}{|\underline{स}} २^{स} \times य^{स}$$ आहे हें दाखवा.

(१४) $(क + य)^{१३}$ च्या विस्तारांतील मध्यपदें काढा.

(१५) $\left(\frac{३}{य} - \frac{य}{३}\right)^{११}$ च्या विस्तारांतील मध्यपदें काढा.

(१६) $\left(य^{३} - \frac{३}{य^{२}}\right)^{१०}$ च्या विस्तारांतील य-विरहित पद काढा.

(१७) $\left(य + \frac{१}{य}\right)^{२स}$ च्या विस्तारामधी य-विरहित पद काढा.

(१८) $\left(य^{२} + \frac{१}{य}\right)^{१२}$ च्या विस्तारामधील य-विरहित पद काढा.

(१९) $\left(२य + \frac{१}{३य^{२}}\right)^{९}$ च्या विस्तारांतील य-विरहित पद काढा.

(२०) $(१+य)^{४३}$ च्या विस्तारांत $(२न+१)$ व्या पदाचा गुणक $(न+२)$ व्या पदाच्या गुणकासमान असल्यास न ची अर्हा काढा.

[पाटणा १९३०

(२१) जर $(१+य)^{२स+१}$ च्या विस्तारांत $य^{न}$ आणि $य^{स+१}$ यांचे गुणक समान असतील तर न ची अर्हा काढा.

(२२) $(१+य)^{२स}$ च्या विस्तारांतील, मध्यपदांतील गुणक $(१+य)^{२स-१}$ च्या विस्तारांतील दोन मध्यपदांतील गुणकांच्या योगासमान आहे हें दाखवा.

[कलकत्ता १९१८

(२३) $(१+य)^{ट+ठ}$ मधे ट आणि ठ हे धन पूर्णांक असल्यास $य^{ट}$ आणि $य^{ठ}$ यांचे गुणक समान असतात हें सिद्ध करा.

(२४) $(१+य)^{१८}$ च्या विस्तारांत न व्या पदांतील गुणक $(न+४)$ व्या पदांतील गुणकासमान आहे तर न ची अर्हा काढा.

११.५ द्विपद प्रमेयाचा उपयोग करून त्रिपदाचा विस्तार करता येतो.

उदाहरण— $(१+य+य^{२})^{स}$ चा य च्या आरोही घातांत विस्तार करा.

$(य+य^{२})$ हें एकच पद मानून आणि द्विपद प्रमेयाचा उपयोग करून

$[१+(य+य^२)]^स$

$$=१+{}^स च_१(य+य^२)+{}^स च_२(य+य^२)^२ + {}^स च_३(य+य^२)^३+\ldots\ldots+(य+य^२)^स$$

$$=१+{}^स च_१ य(१+य)+{}^स च_२ य^२(१+य)^२ + {}^स च_३ य^३(१+य)^३+\ldots\ldots+य^स(१+य)^स$$

आता $(१+य)^२$, $(१+य)^३$, $(१+य)^४ \ldots\ldots (१+य)^स$ यांचा द्विपद प्रमेयाने विस्तार करून आणि य च्या आरोही घातांत पदांची पुनर्रचना करून

$$(१+य+य^२)^स=१+{}^स च_१ य+({}^स च_१+{}^स च_२)य^२ + ({}^स च_१+२\,{}^स च_२+{}^स च_३)य^३+\ldots$$

११.६ $(१+य)^स$ च्या विस्तारांतील संख्येने महत्तम पद काढणे.

$(१+य)^स$ च्या विस्तारांतील नवें आणि $(न+१)$ वें पद लिहा.

$$प_न=\frac{स(स-१)\ (स-२)\ldots\ldots(स-न+२)}{१\times२\times३\ldots\ldots\ldots(न-१)}\ य^न,$$

$$प_{न+१}=\frac{स\ (स-१)\ (स-२)\ldots\ldots(स-न+१)}{१\times२\times३\ldots\ldots\ldots न}य^न$$

म्हणून $\dfrac{प_{न+१}}{प_न}=\dfrac{स-न+१}{न}य$

यावरून $प_{न+१} \gtreqless प_न$ हा संबंध हवा असल्यास

$$\frac{प_{न+१}}{प_न} \gtreqless १ \text{ असावयास पाहिजे.}$$

पण $\quad \frac{प_{न+१}}{प_न} = \frac{स - न + १}{न}$ य

म्हणून $\quad \frac{स - न + १}{न} \times य \gtreqless १$ असावयास पाहिजे.

किंवा $(स + १)\ य \gtreqless न(१ + य)$

म्हणून $\quad न \lesseqgtr \frac{स + १}{१ + य} \times य$ असावयास पाहिजे.

किंवा $न \lesseqgtr \frac{स + १}{१ + य}$ य असल्यास $प_{न+१} \gtreqless प_न$ हा

इष्ट संबंध सिद्ध होतो.

प्रकार १ ला. समजा $\frac{स + १}{१ + य} \times य$ ही राशि त या पूर्णांका-

समान आहे.

म्हणून $न \lesseqgtr त$ असेल तदनुसार $प_{+१} \gtreqless प_न$

(अ) आता न च्या, १ पासून त $-$ १ पर्यंत सर्व अर्हा घेतल्यास न त पेक्षा लहान असतो म्हणून न च्या, १,२,३,.... त $-$ १ या सर्व अर्हांसाठी $प_{न+१} > प_न$

म्हणून $प_त > प_{त-१} > प_{त-२} \ldots > प_३ > प_२ > प_१$

$प_त$ हें पद $प_१, प_२, प_३ \ldots प_त$ यांपैकी महत्तम पद आहे.

(आ) आता न = त या अर्हेसाठी

$$प_{त+१} = प_त$$

(इ) आता, न च्या (त + १) पासून स पर्यंत सर्व अर्हा घेतल्यास न त पेक्षा अधिक असतो. म्हणून न च्या (त + १) पासून स पर्यंत सर्व अर्हांसाठी

$$प_{न+१} < प_न$$

म्हणून $प_{त+१} > प_{त+२} > प_{त+३} > \ldots > प_{स+१}$

$\therefore$ $प_{त+१}, प_{त+२}, \ldots प_{स+१}$ या पदांपैकी $प_{त+१}$ हें पद महत्तम आहे.

यावरून जर $\frac{स+१}{१+य}$ य ही राशि त या पूर्णांकासमान असेल तर $प_त$ आणि $प_{त+१}$ हीं दोन पदें संख्येनें महत्तम असून समान असतात.

प्रकार २ रा. समजा $\frac{(न+१)}{१+य}$ य हा एक भिन्न आहे.

त्यांतील पूर्णांक अंगाचें थ ने अभिधान करा.

अर्थात् न $\lesseqgtr$ थ + लघ्वांश भिन्न असेल

तदनुसार $प_{न+१} \gtrless प_न$

(अ) न च्या १ पासून थ पर्यंत सर्व अर्हांसाठी न,

$\frac{स+१}{१+य}$ य पेक्षा लहान असतो.

म्हणून न च्या १, २, ३......, थ या सर्व अर्हांसाठी

$प_{न+१} > प_न$

अर्थात् $प_१ < प_२ < प_३ < \ldots\ldots < प_थ < प_{थ+१}$

म्हणून $प_१, प_२, प_३ \ldots\ldots प_{थ+१}$ या पदांपैकी $प_{थ+१}$ हें महत्तम पद आहे.

(आ) थ नंतरची न ची अर्हा थ+१ आहे.

आता न च्या (थ+१) पासून स पर्यंत सर्व अर्हांकरिता

न > थ+ लघ्वांशभिन्न.

यावरून न च्या थ+१, थ+२,......स या अर्हांकरीता

$प_{न+१} < प_न$

म्हणून $प_{थ+१} > प_{थ+२} > प_{थ+३} > \cdots > प_{स+१}$

अर्थात् $प_{थ+१}, प_{थ+२}, प_{थ+३}, \ldots\ldots प_{स+१}$ यांपैकी $प_{थ+१}$ हें महत्तम पद आहे.

म्हणून $\frac{स+१}{१+य} \times$ य हा भिन्न असल्यास आणि त्याचा

पूर्णांक भाग थ च्या असल्यास $प_{थ+१}$ हें पद संख्येने महत्तम असतें.

उदाहरण— $य = \frac{१}{२}$ असल्यास $(१+५य)^{९}$ च्या विस्तारांतील महत्तम पद काढा.

$$प_न' = \frac{९ \times ८ \ldots\ldots (९-न+२)}{१ \times २ \times ३ \ldots\ldots (न-१)} (५य)^{न-१}$$

$$प_{न+१} = \frac{९ \times ८ \ldots\ldots (९-न+१)}{१ \times २ \times ३ \ldots\ldots न} (५य)^{न}$$

आता $\frac{प_{न+१}}{प_न} = \frac{९-न+१}{न} (५य)$

$$= \frac{१०-न}{न} ५य$$

आता $य = \frac{१}{३}$ ठेऊन

$$\frac{प_{न+१}}{प_न} = \frac{१०-न}{न} \left(\frac{५}{३}\right)$$

आता $\frac{१०-न}{न} \quad \frac{५}{३} \gtreqless १$ तदनुसार $प_{न+१} \gtreqless प_न$

किंवा $न \lesseqgtr ६\frac{१}{४}$ तदनुसार $प_{न+१} \gtreqless प_न$

तेव्हा न ज्या १, २, ३,......५,६ या अहांकरिता

$न < ६\frac{१}{४}$

म्हणून $प_{न+१} > प_न$

अर्थात् $प_१ < प_२ < प_३ < \ldots\ldots < प_६ < प_७ \ldots\ldots$ (अ)

असतो; आणि स विषम असल्यास

$^{स}च_{\frac{स-१}{२}}$ ; आणि $^{स}च_{\frac{स+१}{२}}$

हे महत्तम गुणक असून समान असतात.

११.८ द्विपद प्रमेयाची सिद्धता

स धन पूर्णांक असल्यास

$$(य+क)^{स} = य^{स} + {}^{स}च_{१}कय^{स-१} + {}^{स}च_{२}क^{२}य^{स-२} + \ldots$$

$$+ {}^{स}च_{न}\, क^{न}य^{स-न} + \ldots + {}^{स}च_{स-१}क^{स-१}य + क^{स}$$

हें गणितीय अनुमानाच्या पद्धतीने खाली सिद्ध करून दाखविलें आहे.

जेव्हां स = १ तेव्हां

$य + क = य + क$ ......... (अ)

म्हणून स = १ असल्यास द्विपद प्रमेय सिद्ध होतें.

जेव्हां स = २ तेव्हां (अ) चा उपयोग करून

$$(य+क)^{२} = (य+क)(य+क)$$

$$= य^{२} + २कय + क^{२}$$

$$= य^{२} + {}^{२}च_{१}क \times य + २च_{२}क^{२} \text{ ...... (आ)}$$

यावरून स = २ असल्यास द्विपद प्रमेय सिद्ध होतें.

जेव्हां स = ३ तेव्हां (आ) चा उपयोग करून

$$(य+क)^2 = (य^2 + {}^2च_1 कय + {}^2च_2 क^2)\ (य+क)$$

$$= य^3 + {}^2च_1 कय^2 + {}^2च_2 क^2य$$

$$+ कय^2 + {}^2च_1 क^2य + {}^2च_2 क^3$$

$$= य^3 + ({}^2च_1 + १) कय^2$$

$$+ ({}^2च_2 + {}^2च_1) क^2य + {}^2च_2 क^3$$

$$= य^3 + {}^3च_1 कय^2 + {}^3च_2 क^2य + {}^3च_3 क^3$$

$$= य^3 + ३कय^2 + ३क^2य + क^3$$

यावरून स=३ असल्यास द्विपद प्रमेय सिद्ध होतें.

प्रत्येक अनुमान काढतांना त्याच्या पूर्वीच्या अनुमानाचा उपयोग केला आहे, ही गोष्ट लक्षांत ठेवली पाहिजे.

आता, स च्या म या विशिष्ट अर्हेकरिता द्विपदप्रमेय सिद्ध आहे असें समजा.

म्हणून

$$(य+क)^म = य^म + {}^मच_1 क \times य^{म-1} + {}^मच_2 \times क^2 य^{म-2} + \ldots$$

$$+ {}^मच_{न-1} क^{न-1} य^{म-न+1}$$

$$+ {}^मच_न क^न य^{म-न} + \ldots\ldots + क^म$$

दोन्ही पक्षास (य+क) ने गुणून

$$वाम\ पक्ष = (य+क)^{म+1}$$

दक्षिण पक्ष

$$=[य+क]\,[य^म + {}^मच_१ कय^{म-१} + {}^मच_२ क^२ य^{म-२} + \ldots + {}^मच_{न-१} क^{न-१} य^{म-न+१} + {}^मच_न क^न य^{म-न} + \ldots\ldots + क^म]$$

$$=[य^{म+१} + {}^मच_१ कय^म + {}^मच_२ क^२ य^{म-१} + \ldots\ldots + {}^मच_{न-१} क^{न-१} य^{म-न+२} + {}^मच_न क^न य^{म-न+१} + \ldots\ldots + {}^मच_{म-१} क^{म-१} य^२ + क^म य]$$

$$+[कय^म + {}^मच_१ क^२ य^{म-१} + \ldots\ldots + {}^मच_न क^न य^{म-न+१} + \ldots\ldots + {}^मच_{म-१} क^म य + क^{म+१}]$$

$$= य^{म+१} + ({}^मच_१ + १) कय^म + ({}^मच_२ + {}^मच_१) क^२ य^{म-१} + \ldots + ({}^मच_न + {}^मच_{न-१}) क^न य^{म-न+१} + \ldots\ldots + क^{म+१})$$

पण न च्या सर्व अंकांकरितां

$${}^मच_न + {}^मच_{न-१} = {}^{म+१}च_न$$

म्हणून दक्षिण पक्ष $= य^{म+१} + {}^{म+१}च_१ कय^म + {}^{म+१}च_२ क^२ य^{म-१} + \ldots\ldots + {}^{म+१}च_न क^न य^{म-न+१} + \ldots\ldots + {}^{म+१}च_म क^म य + क^{म+१}$

वरील पदसंहति $(य+क)^{म+१}$ चा द्विपद विस्तार आहे.

तेव्हां स च्या एखाद्या विशिष्ट अर्हेकरिता हें द्विपद प्रमेय सिद्ध होतें ही आपली मानना सत्य असल्यास स च्या आगामी उच्चतर अर्हेकरिताहि द्विपद प्रमेय सिद्ध होतें असें दिसून येतें.

आता, स=१ असल्यास द्विपद प्रमेय सिद्ध आहे हें आपण पाहिलेंच आहे.

म्हणून स=२ असल्यास तें प्रमेय सिद्ध आहे.

आता, स=२ असल्यास तें प्रमेय सिद्ध आहे म्हणून स=३ असल्यास द्विपदप्रमेय सिद्ध आहे.

आता, स=३ करिता तें प्रमेय सिद्ध आहे म्हणून स=४ करिता तें सिद्ध आहे.

आता स=४ करिता तें प्रमेय सिद्ध आहे म्हणून स=५ करिता तें सिद्ध आहे.

अशा परंपरेने स च्या सर्व धन पूर्णांक अर्हांकरिता द्विपद प्रमेय सिद्ध आहे.

११.९ वरील विस्तारांत य ला निरनिराळ्या अर्हा दिल्यास अनेक ऐकात्म्यें निष्पन्न होतात.

टीप — अन्यथा निर्देश केल्याविना $च_{न}$ ने $^{स}च_{न}$ चें अभिधान होतें असें समजावें.

ऐकात्म्य १— गुणकांचा योग—

$(१+य)^{स}$

$$=च_{०}+च_{१}य+च_{२}य^{२}+\dots+च_{न}य^{न}+\dots+च_{स}य^{न}$$

$$च_{०}=१,\ आणि\ च_{स}=१$$

आता य ऐवजी १ चा आदेश करा.

म्हणजे $२^{स} = च_{०} + च_{१} + च_{२} + \dots + च_{न} + \dots + च_{स}$

$= $ सर्व गुणकांचा योग.

म्हणून $च_{१} + च_{२} + च_{३} + \dots\dots + च_{न} + \dots\dots + च_{स} = २^{स} - १$

ऐकात्म्य २—

$(१ + य)^{स}$ च्या विस्तारांतील सम पदांतील गुणकांचा योग विषम पदांतील गुणकांच्या योगासमान असतो.

$$(१ + य)^{स} = च_{०} + च_{१}य + च_{२}य^{२} + \dots + च_{स}य^{स}$$

या फलांत य ऐवजी $-१$ ठेवा.

म्हणजे $० = च_{०} - च_{१} + च_{२} - च_{३} + \dots\dots + (-१)^{स}च_{स}$

म्हणून $च_{०} + च_{२} + च_{४} + \dots = च_{१} + च_{३} + च_{५} + \dots$

आता $च_{०} + च_{२} + च_{४} + \dots = च_{१} + च_{३} + च_{५} + \dots\dots$

$= \frac{१}{२}$ [सर्व गुणकांचा योग]

$= \frac{१}{२} + २^{स}$

$= २^{स-१}$

## ११.९१ सोडविलेलीं उदाहरणें

उदाहरण १—

$च_{१} + २च_{२} + ३च_{३} + \dots\dots + ^{न}च_{न} + \dots\dots\dots + ^{स}च_{स}$

$= स \times २^{स-१}$ हें दाखवा.

$$\text{च}_१ + २\text{च}_२ + ३\text{च}_३ + \dots\dots + \text{न}\text{च}_\text{न} + \dots\dots \text{स}\text{च}_\text{स}$$

$$= \left[ \text{स} + \frac{२ \times \text{स}\,(\text{स}-१)}{१ \times २} + \frac{३\text{स}(\text{स}-१)(\text{स}-२)}{१ \times २ \times ३} \right.$$

$$\left. \dots\dots + \frac{\text{न}\,\underline{|\text{स}}}{\underline{|\text{न}}\;\underline{|\text{स}-\text{न}}} + \dots\dots + \text{स} \right]$$

$$= \text{स}\left[ १ + (\text{स}-१) + \frac{(\text{स}-१)\,(\text{स}-२)}{१ \times २} + \dots\dots \right.$$

$$\left. + \frac{\underline{|\text{स}-१}}{\underline{|\text{न}-१}\;\underline{|\text{स}-१-(\text{न}-१)}} + \dots + १ \right]$$

$$= \text{स}\,[{}^{\text{स}-१}\text{च}_० + {}^{\text{स}-१}\text{च}_१ + {}^{\text{स}-१}\text{च}_२ + \dots + {}^{\text{स}-१}\text{च}_{\text{न}-१}$$

$$+ \dots\dots + {}^{\text{स}-१}\text{च}_{\text{स}-१}]$$

$$= \text{स} \times २^{\text{स}-१}$$

उदाहरण २—

$${}^{\text{स}}\text{च}_० - \frac{१}{२}\,{}^{\text{स}}\text{च}_१ + \frac{१}{३}\,{}^{\text{स}}\text{च}_२ - \dots\dots$$

$$\dots\dots + \frac{(-१)^{\text{स}}\,{}^{\text{स}}\text{च}_\text{स}}{\text{स}+१} = \frac{१}{\text{स}+१}$$ हें दाखवा.

$${}^{\text{स}}\text{च}_० - \frac{१}{२}\,{}^{\text{स}}\text{च}_१ + \frac{१}{३}{}^{\text{स}}\text{च}_२ - \dots + (-१)^{\text{स}}\,\frac{१}{\text{स}+१} \times {}^{\text{स}}\text{च}_\text{स}$$

$$= १ - \frac{\text{स}}{२} + \frac{\text{स}(\text{स}-१)}{१ \times २ \times ३} + \dots + (-१)^{\text{स}}\,\frac{१}{\text{स}+१}$$

$$=\frac{१}{स+१}\Big[(स+१)-\frac{(स+१)(स)}{१\times२}+\frac{(स+१)स(स-१)}{१\times२\times३}+\dots+(-१)^{स}\Big]$$

$$=\frac{१}{स+१}\Big[{}^{स+१}च_{१}-{}^{स+१}च_{२}+{}^{स+१}च_{३}-\dots\dots+(-१)^{स}\,{}^{स+१}च_{स+१}\Big]$$

$$=\frac{१}{स+१}-\frac{१}{स+१}\Big[१-{}^{स+१}च_{१}+{}^{स+१}च_{२}-{}^{स+१}च_{३}+\dots+(-१)^{स+१}\,{}^{स+१}च_{स+१}\Big]$$

$$=\frac{१}{स+१}-\frac{१}{स+१}\Big[१-१\Big]^{स+१}$$

$$=\frac{१}{स+१}$$

उदाहरण ३— जर $(१+य)^{स}$ च्या विस्तारांत $च_{०}, च_{१}, च_{२}, \dots\dots च_{स}$ हे गुणक असतील तर

$$३च_{०}+३^{२}\frac{च_{१}}{२}+३^{३}\frac{च_{२}}{३}+\dots\dots+\frac{३^{स+१}च_{स}}{स+१}$$

$$=\frac{४^{स+१}-१}{स+१}$$ हें दाखवा.

$$३च_{०}+३^{२}\frac{च_{१}}{२}+३^{३}\frac{च_{२}}{३}+\dots\dots+\frac{३^{स+१}च_{स}}{स+१}$$

$$=\frac{१}{स+१}\Big[३(स+१)च_० + ३^२(स+१)\frac{च_१}{२} + \frac{३^३(स+१)च_२}{३} + \ldots\ldots + ३^{स+१}च_स\Big]$$

$$=\frac{१}{स+१}\Big[\Big\{१+३(स+१) + \frac{३^२(स+१)स}{१\times२} + ३^३\frac{(स+१)(स)(स-१)}{१\times२\times३} + \ldots + ३^{स+१}\Big\} - १\Big]$$

$$=\frac{१}{स+१}\Big[{}^{स+१}च_० + {}^{स+१}च_१\times३ + {}^{स+१}च_२\times३^२ + \ldots\ldots + {}^{स+१}च_{स+१}\times३^{स+१} - १\Big]$$

$$=\frac{१}{स+१}\Big[(१+३)^{स+१} - १\Big]$$

$$=\frac{४^{स+१}-१}{स+१}$$

उदाहरण ४— जर $च_०, च_१, च_२, \ldots\ldots च_स$ हे $(१+य)^स$ च्या विस्तारांतील गुणक असतील तर

$$च_०च_१ + च_१च_२ + च_२च_३ + \ldots\ldots + च_{स-१}च_स = \frac{\lfloor२स}{\lfloor स-१ \; \lfloor स+१}$$

आहे हें दाखवा.

आता $(१+य)^{स} = च_० + च_१ य + च_२ य^२ + च_३ य^३ + \dots\dots$
$+ च_न य^न + \dots\dots + च_स य^स$ ..............(अ)

य ऐवजी $\frac{१}{य}$ ठेवा

म्हणजे $\left[१ + \frac{१}{य}\right]^{स} = च_० + \frac{च_१}{य} + \frac{च_२}{य^२} + \frac{च_३}{य^३} + \dots + \frac{च_न}{य^न}$
$+ \dots\dots + \frac{च_स}{य}$ .........(आ)

(अ) आणि (आ) यांचा गुणाकार करुन

$$\frac{(१+य)^{२स}}{य^स}$$
$$= \left[च_० + च_१ य + च_२ य^२ + \dots + च_न य^न + \dots + च_स य^स\right]$$
$$\times \left[च_० + \frac{च_१}{य} + \frac{च_२}{य^२} + \dots\dots + \frac{च_न}{य^न} + \dots + \frac{च_स}{य^स}\right] \quad \dots\dots\dots\dots(इ)$$

पण $\frac{(१+य)^{२स}}{य^स}$

$$= \frac{१}{य^स}\left[{}^{२स}च_० + {}^{२स}च_१ य + {}^{२स}च_२ य^२ + \dots\dots\dots\dots\dots\right.$$
$$\left. + {}^{२स}च_{स+१} य^{स+१} + {}^{२स}च_स य^स \dots + \dots + {}^{२स}च_{२स} य^{२स}\right]$$

(इ) हे ऐकात्म्य असल्यामुळे $\frac{(१+य)^{२स}}{य^स}$ च्या

विस्तारांतील विशिष्ट घात असलेल्या य चा गुणक (इ) च्या दक्षिण पक्षांतील तोच घात असलेल्या गुणकासमान होईल.

आता $च_० च_१ + च_१ च_२ + च_२ च_३ + च_{स-१} च_स \ldots\ldots$

हा इष्ट योग (इ) च्या दक्षिण पक्षांत य चा किंवा $\frac{१}{य}$ चा गुणक असून तो $\frac{(१+य)^{२स}}{य^स}$ च्या विस्तारांतील य च्या किंवा $\frac{१}{य}$ च्या गुणकासमान होतो.

म्हणून $च_० च_१ + च_१ च_२ + च_२ च_३ + \ldots\ldots + च_{स-१} च_स$

$$= {}^{२स}च_{स-१}$$

$$= \frac{\lfloor २स}{\lfloor स-१ \quad \lfloor स+१}$$

## प्रश्नसंग्रह १७

(१) $(१+य+य^२)^५$ च्या विस्तारांतील $य^४$ चा गुणक काढा.

(२) $(१+२य+३य^२)^६$ च्या विस्तारांतील $य^५$ असलेलें पद काढा.

(३) $(२+\sqrt{य}-य)^५$ च्या विस्तारांतील $य^४$ चा गुणक काढा.

(४) य आणि र यांच्या यथानिर्दिष्ट अर्हा घेऊन खालील द्विपद विस्तारांतील महत्तम पदें काढा.

(१) $य=३;\ र=८;\ (२य-र)^{१०}$

(२) $य=८;\ र=५;\ (य+र)^{१०}$

(३) $य=३;\ र=५;\ (य+र)^{१०}$

(५) $(१+य)^{३२}$ च्या विस्तारांतील महत्तम पदांतच महत्तम द्विपद गुणक असण्यासाठी य च्या अर्हांच्या सीमा काढा.

(६) य च्या दत्त अर्हा घेऊन खालील विस्तारांतील महत्तम पदें काढा.

(१) $(१+य)^{११}$, जेव्हा $य=\frac{१}{२}$

(२) $\left(१-\frac{य}{२}\right)^{१४}$, जेव्हा $य=\frac{३}{२}$

(३) $(१+२य)^{२०}$, जेव्हा $य=\frac{३}{२}$

(४) $\left(२-\frac{य}{५}\right)^{१७}$, जेव्हा $य=\frac{४}{५}$

खालील उदाहरणांत [७ ते १४], $(१+य)^{स}$ च्या विस्तारांतील गुणकांचे $च_०, च_१, च_२, \ldots च_स$ यांनी अभिधान केलें आहे तर

(७) $च_० + २च_१ + ३च_२ + \ldots + (स+१)च_स$ ची अर्हा काढा.

(८) $\frac{च_{१}}{च_{०}} + \frac{२च_{२}}{च_{१}} + \frac{३च_{३}}{च_{२}} + \cdots + \frac{सच_{स}}{च_{स-१}} = \frac{स(स+१)}{२}$

आहे हें दाखवा.

(९) $(च_{०}+च_{१})(च_{१}+च_{२})\ldots(च_{स-१}+च_{स})$

$$= \frac{च_{०}च_{१}च_{२}\ldots च_{स}(स+१)^{स}}{\underline{|स}}$$

आहे हें दाखवा.

(१०) $च_{०}च_{२} + च_{१}च_{३} + \ldots + च_{स-२}च_{स}$

$$= \frac{\underline{|२स}}{\underline{|स-२}\ \underline{|स+२}}$$

आहे हें दाखवा.

(११) $च_{०}च_{न} + च_{१}च_{न+१} + \ldots\ldots + च_{स-न}च_{स}$

$$= \frac{\underline{|२स}}{\underline{|स-न}\ \underline{|स+न}}$$

आहे हें दाखवा.

(१२) $च_{०}^{२} - च_{१}^{२} + च_{२}^{२} - च_{३}^{२} + \ldots$

$$+ (-१)^{स} च_{स}^{२} = ०$$

किंवा $= \frac{(-१)^{\frac{स}{२}}\ \underline{|स}}{\left(\underline{|\tfrac{स}{२}}\right)^{२}}$ आहे हें दाखवा.

(१३) $च_{०} + \frac{च_{१}}{२} + \frac{च_{२}}{३} + \ldots + \frac{च_{स}}{स+१} = \frac{२^{स+१} - १}{स+१}$

आहे हें दाखवा.

(१४) $२च_{०} + ५च_{१} + ८च_{२} + \ldots + (३स + २)च_{स}$

$= (३स + ४)२^{स-१}$ आहे हें दाखवा.

(१५) $(१ + य)^{म+स} = (१ + य)^{म}(१ + य)^{स}$

हें ऐकात्म्य उपयोगांत आणून

$^{म+स}च_{न} = {}^{म}च_{न} + {}^{म}च_{न-१}\,{}^{स}च_{१} + \ldots\ldots$

$+ {}^{म}च_{न-२}\,{}^{स}च_{२} + \ldots\ldots + {}^{स}च_{न}$

आहे हें दाखवा.

# प्रकरण बारावें

## द्विपद प्रमेय

कोणताहि घात

१२.१ स हा धन पूर्णांक असल्यास

$$(१+य)^{स}=१+{}^{स}च_{१}य+{}^{स}च_{२}य^{२}+\ldots\ldots$$

$$+{}^{स}च_{न}य^{न}+\ldots\ldots+य^{स}$$

किंवा $$=१+सय+\frac{स(स-१)}{१\times२}य^{२}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{\lfloor स}{\lfloor न\ \lfloor स-न}य^{न}+\ldots+य^{स}$$

हें प्रमेय आपण मागील प्रकरणांतच सिद्ध केलें आहे.

या विस्तारासंबंधी खालील गोष्टी लक्षांत ठेवल्या पाहिजेत.

(१) विस्तारांतील पदांची संख्या परिमित असून ती (स+१) आहे. आणि

(२) य च्या सर्व अर्हांकरिता हा विस्तार सत्य आहे.

$१+सय+\frac{स(स-१)}{१\times२}य^{२}+\ldots\ldots+य^{स}$ या सांत

येथीचें $(१+य)^स$ हें संक्षिप्त रूप आहे असें आपण मानूं शकतों किंवा

$$(१+य)^स \text{ हें व्यंजक आणि } १+सय+\frac{स(स-१)}{\lfloor २} य^२$$

$$+\frac{स(स-१)(स-२)}{\lfloor ३} य^३+\ldots\ldots+य^स \text{ ही पदसंहति}$$

हीं दोन समतुल्य आहेत हें आपण समजूं शकतों.

आता, द्विपदाचा घात कोणताहि असतांना द्विपद विस्तार काढण्याची रीति देण्यापूर्वी वरील समानतेकडे लक्ष ठेवून, (१२.२) आणि (१२.३) ह्या अनुच्छेदांत सोडविलेल्या प्रश्नांचा अभ्यास करणें इष्ट आहे.

१२.२ $(१+४य+८य^२+८य^३)$ला $(१+२य)$ने भागा.

$$
\begin{array}{l|l|l}
१+२य & १+४य+८य^२+८य^३ & १+२य+४य^२ \\
 & १+२य & \\
 & -\quad - & \\
\hline
 & \quad २य+८य^२ & \\
 & \quad २य+४य^२ & \\
 & \quad -\quad - & \\
\hline
 & \qquad ४य^२+८य^३ & \\
 & \qquad ४य^२+८य^३ & \\
 & \qquad -\quad - & \\
\hline
 & \qquad \times\quad \times & \\
\end{array}
$$

यांत शेष शून्य असल्यामुळे भागाकाराची क्रिया पूर्ण होते.

म्हणून $\frac{१ + ४य + ८य^२ + ८य^३}{१ + २य} = १ + २य + ४य^२$

डावीकडच्या व्यंजकासमान उजवीकडची श्रेढी मांडतां येते.

आता, १ ला (१ − य) ने भागिल्यास भागाकार-क्रिया कधीच पूर्ण होत नाही. उलट भागाकारांत $१ + य + य^२ + य^३ + \ldots\ldots \infty$ ही य च्या आरोही घातांतील श्रेढी येते.

दोन्ही वेळां प्रत्यक्ष भागाकार करण्याच्या पद्धतीचा आपण अवलंब केला. परंतु पहिल्या वेळीं य ची अर्हा कांहीहि असली तरी भागाकार पूर्ण येतो, आणि त्याचें प्रतिनिधान

य ची कोणतीहि अर्हा असली तरी $\frac{१ + ४य + ८य^२ + ८य^३}{१ + २य}$

ने करता येतें.

दुसऱ्या वेळीं भागाकार अपूर्ण राहून भागाकारांत एक अनंत श्रेढी येते. या फलाचें निर्वचन (interpretation)

कसें करावयाचें किंवा य च्या सर्व अर्हांसाठी $\frac{१}{१ - य}$ या

व्यंजकानें $१ + य + य^२ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty$ या श्रेढीचें प्रतिनिधान होऊं शकतें काय असा प्रश्न उपस्थित होतो.

हा प्रश्न खालील रीतीनें सोडवितां येतो.

य = २ घेतल्यास

$$\frac{१}{१-य} = \frac{१}{१-३} = -\frac{१}{२}$$

आणि $१+य+य^२+य^३+ \ldots\ldots \infty = १+३+३^२ +३^३+ \ldots\ldots \infty$

म्हणून $-\frac{१}{२}$ ने अर्थात् एका ऋण संख्येने

$१+३+३^२+३^३+ \ldots\ldots \infty$ चें अर्थात् एका असंख्य धन राशीचें प्रतिनिधान करावें लागेल. पण हें विसंगत आहे.

म्हणून य च्या सर्वच् अहींकरिता $\frac{१}{१-य}$ हें व्यंजक

$१+य+य^२+ \ldots\ldots \infty$ या श्रेढीचें प्रतिनिधान करीत नाही हें स्पष्ट आहे.

दिलेल्या श्रेढीचें प्रतिनिधान एखाद्या व्यंजकानें होऊं शकतें किंवा नाही हें ठरविण्यासाठी दिलेल्या अनंत श्रेढीच्या पहिल्या स पदांचा योग काढून नंतर स ला असीमित वाढवून या योगाच्या आचरणाचें निरीक्षण करा.

आता, $१+य+य^२+ \ldots\ldots +य^{स-१}+ \ldots\ldots \infty$ ही गुणोत्तर श्रेढी असल्यामुळे तिचा योग $= \frac{१-य^स}{१-य}$

या योगाचें $यो_स$ ने अभिधान केल्यास

$$यो_स = \frac{१-य^स}{१-य}$$

$$= \frac{१}{१-य} - \frac{य^स}{१-य}$$

(अ) आता, य च्या अर्हा $-१$ आणि $+१$ यांमध्ये आहेत अर्थात् $-१ < य < १$ असें समजा.

य वरील या निर्बंधाने (restriction) स जशी जशी उच्चतर अर्हा घेत जातो तशी तशी $य^स$ ची अर्हा लघुतर होत जाते.

म्हणून $-१ < य < १$. आणि स $\rightarrow \infty$ असल्यास

$$\frac{य^स}{१-य} \rightarrow ०$$

आणि म्हणून सीमांती $\left[\frac{१}{१-य} - \frac{य^स}{१-य}\right]$ याची अर्हा

$\frac{१}{१-य}$ च्या अतिनिकट येते.

यावरून य च्या $-१ < य < १$ या अर्हांकरिता $१+य+य^२+य^३+$..........या श्रेढीच्या स पदांचा योग स सीमातीत वाढविला असता जवळ जवळ $\frac{१}{१-य}$ च्या समान होतो.

य च्या अर्हेवर हा निर्बंध असतांनाच केवळ

$\frac{१}{१-य}$ ही लब्धि $१+य+य^२+य^३+\dots\infty$ या अनंत श्रेढीशीं तुल्य आहे असें आपण घेउ शकतों किंवा

$१+य+य^२+\ldots\infty$ या श्रेढीचें प्रतिनिधान $\frac{१}{१-य}$ ह्या

व्यंजकाने करतां येतें.

म्हणून य च्या $-१<य<१$ या अर्हांकरिता

$१+य+य^२+\ldots\ldots\infty$ ही अनंत श्रेढी $\frac{१}{१-य}$ कडे अभि-

सारी (convergent) आहे असें म्हणतात.

(आ) आता $य=-१$ पेक्षा लहान (उदाहरणार्थ $य=-८$) किंवा $+१$ पक्षा मोठा (उदाहरणार्थ $य=३$) आहे म्हणजेच $य>१$ किंवा $य<-१$ आहे असें समजा.

$$१+य+य^२+\ldots\ldots+य^{स-१}=\frac{१}{१-य}-\frac{य^स}{१-य}$$

स जशी जशी उच्चतर अर्हा घेत जातो तशी तशी $य^स$ चीहि अर्हा उच्चतर होत जाते म्हणून $\frac{य^स}{१-य}$ ची अर्हाहि

स बरोबरच वाढते.

आपण जशी जशी स ची अर्हा उच्चतर करूं तशी तशी $१+य+य^२+य^३+\ldots\ldots+य^{स-१}$ या श्रेढीची—

म्हणजेच $\left[\frac{१}{१-य}-\frac{य^स}{१-य}\right]$ या पदसंहतीची— अर्हा आणि

$\frac{१}{१-य}$ यामधील फरक अधिकाधिक होईल.

स सीमातीत वाढविला असतांना $१+य+य^२+\ldots\ldots$ ह्या श्रेढीचा योग $\frac{१}{१-य}$ च्या निकट येत नाही. म्हणून य

संख्येने १ पेक्षा मोठा असल्यास $\frac{१}{१-य}$ हें व्यंजक १+य +य$^{२}$+......∞ या श्रेढीचें प्रतिनिधान करूं शकत नाही. म्हणून य >१ किंवा य <−१ या य च्या अर्हांकरिता आपण $\frac{१}{१-य}$= १+य+य$^{२}$+य$^{३}$+......∞ असें लिहूं शकत नाहीं. अशा श्रेढींना अपसारी (divergent) श्रेढ्या म्हणतात.

१२.२२ वरील पर्यालोचनानें खालील फलें निष्पन्न होतात.
−१<य <+१ असल्यास १+य+य$^{२}$+......+य$^{स-१}$ या श्रेढीचा योग स→∞ असतांना जवळजवळ $\frac{१}{१-य}$ च्या समान असतो. आणि सीमांतीं

$\frac{१}{१-य}$ =१+य+य$^{२}$+......∞ अशी समता मांडतां येते. पण य संख्येने १ पेक्षा मोठा असल्यास

$\frac{१}{१-य}$ =१+य+य$^{२}$+य$^{३}$ +........∞ ही समता लिहितां येत नाहीं.

१२.३ (१+य)$^{\frac{३}{२}}$ ची अर्हा मूळ क्रियेनें (process of evolution) काढा.

(१+य)$^{\frac{३}{२}}$=[(१+य)$^{३}$]$^{\frac{१}{२}}$=(१+३य+३य$^{२}$+य$^{३}$)$^{\frac{१}{२}}$

| | | |
|---|---|---|
| $१$ | $१ + ३य + ३य^२ + य^३$ | $१ + \frac{३}{२}य + \frac{३}{८}य^२ - \frac{१}{१६}य^३$ |
| $१$ | $१$ | |
| $२ + \frac{३}{२}य$ | $३य + ३य^२$ | |
| $\frac{३}{२}य$ | $३य + \frac{९}{४}य^२$ | |
| | $- \quad -$ | |
| $२ + ३य + \frac{३}{८}य^२$ | $\frac{३}{४}य^२ + य^३$ | |
| $+ \frac{३}{८}य^२$ | $\frac{३}{४}य^२ + \frac{९}{८}य^३ + \frac{९}{६४}य^४$ | |
| | $- \quad - \quad -$ | |
| $२ + ३य + \frac{३}{४}य^२ - \frac{१}{१६}य^३$ | $-\frac{य^३}{८} - \frac{९}{६४}य^४$ | |
| | $-\frac{य^३}{८} - \frac{३य^४}{१६} - \frac{३य^५}{६४} + \frac{य^६}{२५६}$ | |
| | $+ \quad + \quad + \quad -$ | |
| | $\frac{३}{६४}य^४ + \frac{३य^५}{६४} - \frac{य^६}{२५६}$ | |

वरील पद्धतीने $(१+य)^{\frac{३}{२}}$ ची अर्हा काढण्याची क्रिया कधीच संपत नाही, उलट इष्ट फलांत प्रत्येक वेळीं एका पदाची भर पडते.

म्हणून $(१+य)^{\frac{३}{२}} = १ + \frac{३}{२}य + \frac{३}{८}य^{२} - \frac{१}{१६}य^{३} + \ldots \infty$

म्हणून य च्या दिलेल्या अर्हांकरिता $(१+य)^{\frac{३}{२}}$ ची यथार्थी (fairly) अचूक अर्हा काढावयाची असल्यास दक्षिण पक्षांतील अधिकाधिक पदें घ्यावीं लागतात.

$(१+य)^{\frac{३}{२}}$ च्या संवादी श्रेढीच्या एखाद्या पदाचा गुणक ठरविण्याकरिता लागणारा नियम दृश्य पदांवरून ठरविणें जवळजवळ अशक्यच आहे.

१२४ $(१+य)^{\frac{३}{२}}$ सारख्या व्यंजकाचें प्रतिनिधान य च्या अर्हांकरिताच एका अनंत श्रेढीने करिता येतें, हें मागील अनुच्छेदांत केलेल्या चर्चेवरून दिसून येईल.

आता स धनपूर्णांक नसतांना आणि य वर इष्ट निर्बंध असतांना $(१+य)^{स}$ या व्यंजकाशीं समतुल्य असें द्विपद विस्ताराचें रूप कसें लिहावयाचें हा प्रश्न उपस्थित होतो.

याकरिता वर्गमूळ आणि भागाकाराच्या पद्धतींनी $(१+य)^{\frac{३}{२}}$ आणि $(१-य)^{-१}$ यांचे जे विस्तार काढले त्यांतील पदांची $(१+य)^{स}$ च्या संवादी पदांशीं तुलना करा.

आता $(१+य)^स = १ + सय + \frac{स(स-१)}{|\underline{२}} य^२ + \ldots (१)$

ही समता स च्या केवळ धनपूर्णांक अहांकरिता सत्य असते हें आपण सिद्ध केलें आहे.

पुन्हा

$$\frac{१}{१-य} = १ + य + य^२ + य^३ + \ldots\ldots \infty [-१ < य < १$$

थोडेसें रूपांतर करून

$$\frac{१}{१-य} = १ + (-१)\ (-य) + \frac{(-१)(-२)}{|\underline{२}} (-य)^२$$

$$+ \frac{(-१)(-२)(-३)}{|\underline{३}} (-य)^३ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (२)$$

आणि $(१+य)^{\frac{३}{२}} = १ + \frac{३}{२} य + \frac{३}{८} य^२ - \frac{१}{१६} य^३ + \ldots\ldots$

$$= १ + \frac{३}{२} य + \frac{\frac{३}{२}\left(\frac{३}{२} - १\right)}{|\underline{२}} य^२ + \frac{\frac{३}{२}\left(\frac{३}{२} - १\right)\left(\frac{३}{२} - २\right)}{|\underline{३}} य^३$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

आता (१) मध्ये स = −१ आणि य ऐवजी −य ठेवा. म्हणजे

$$\frac{१}{१-य} = १ + (-१)(-य) + \frac{(-१)(-२)}{|\underline{२}} (-य)^२$$

$$+\frac{(-१)(-२)(-३)}{\lfloor३}(-य)^{३}+\ldots\ldots(४)$$

पुन्हा (१) मध्ये स $=\frac{३}{२}$ ठेवा म्हणजे

$$(१+य)^{\frac{३}{२}}=१+\frac{३}{२}य+\frac{\frac{३}{२}\left(\frac{३}{२}-१\right)}{\lfloor२}य^{२}$$

$$+\frac{\frac{३}{२}\left(\frac{३}{२}-१\right)\left(\frac{३}{२}-२\right)}{\lfloor३}य^{३}+\ldots\ldots\ldots\ldots(५)$$

(२) आणि (४) तसेंच (३) आणि (५) यांतील संवादी पदांची तुलना केली असतां असें दिसून येतें की (१) या समतेंत

(अ) स $=-१$ आणि य ऐवजी $-$य यांचा प्रत्यक्ष आदेश केल्यास (४) या समतेंतील पदें मिळतात.

आणि (आ) स $=\frac{३}{२}$ ठेवल्यास (५) या समतेंतील पदें मिळतात.

भागाकार किंवा वर्गमूळ काढण्याच्या प्रत्यक्ष-पद्धतीने किंवा $(१+य)^{स}$ च्या विस्तारांत इष्ट आदेश करून येणारीं फलें परस्परांशीं जुळतात. यावरून असा निष्कर्ष निघतो की सच्या अर्हा ऋण किंवा भिन्न असल्यास आणि य च्या अर्हांवर

विशिष्ट निर्बंध (restriction) असल्यास $(१+य)^स$ चा विस्तार

$$१+सय+\frac{स(स-१)}{|\underline{२}}य^२+$$

$$+\frac{स(स-१)(स-२)}{|\underline{३}}य^३+\ldots\ldots\infty$$

या रूपांत करतां येण्याचा संभव आहे.

अशा प्रकारच्या सामान्य (generalised) द्विपद प्रमेयाची सिद्धता या पुस्तकाच्या क्षेत्राबाहेरची आहे. परंतु सामान्य द्विपद प्रमेयाची प्रतिज्ञा (enunciation) आणि ते सत्य असण्याकारिता इष्ट प्रतिबंध पुढे दिल्याप्रमाणे आहेत.

(१) स धनपूर्णांक असल्यास य च्या सर्व अर्हांकरितां आणि (२) $-१<य<१$ असल्यास स च्या सर्व अर्हांकरितां

$$(१+य)^स=१+सय+\frac{स(स-१)}{|\underline{२}}य^२$$

$$+\frac{स(स-१)(स-२)}{|\underline{३}}+\ldots\ldots$$

१२.४१ कांही सोडविलेलीं उदाहरणें—

उदाहरण १— $(१-य)^{\frac{४}{३}}$ चा चार पदापर्यंत विस्तार करा.

$$(१-य)^{\frac{४}{३}}=१+\frac{४}{३}(-य)+\frac{\frac{४}{३}\left(\frac{४}{३}-१\right)}{|\underline{२}}(-य)^२$$

$$+\frac{\frac{४}{३}\left(\frac{४}{३}-१\right)\left(\frac{४}{३}-२\right)}{\underline{|३}}(-य)^{३}+\ldots$$

$$=१-\frac{४}{३}य+\frac{२}{९}य^{२}+\frac{४}{८१}य^{३}+\ldots\ldots$$

उदाहरण २—

$(२+४य)^{-५}$ चा ४ पदापर्यंत विस्तार करा.

$$(२+४य)^{-५}=\frac{१}{३^{५}}\left[१+\frac{४}{३}य\right]^{-५}$$

$$=\frac{१}{३^{५}}\left[१+(-५)\left(\frac{४य}{३}\right)+\frac{-५(-५-१)}{\underline{|२}}\left(\frac{४}{३}य\right)^{२}\right.$$

$$\left.+\frac{-५(-५-१)\ (-५-२)}{\underline{|३}}\left(\frac{४}{३}य\right)^{३}+\ldots\right]$$

$$=\frac{१}{३^{५}}\left[१-\frac{२०}{३}य+\frac{८०}{३}य^{२}-\frac{२२४०}{२७}य^{३}+\ldots\ldots\right]$$

$$=\frac{१}{२४३}-\frac{२०}{७२९}य+\frac{८०}{७२९}य^{२}-\frac{२२४०}{६५६१}य^{३}+\ldots\ldots$$

१२.५ $(१+य)^{स}$ च्या विस्तारांतील सामान्य पद.

आता $(१+य)^{स}=१+सय+\frac{स(स-१)}{\underline{|२}}य^{२}$

$$+\frac{न(न-१)(स-२)}{|\underline{3}}य^{३}+\ldots\ldots$$

$प_{न+१}$ ने सामान्यपदाचें अभिधान केल्यास

सामान्य पद $=(न+१)$वें पद$=प_{न+१}$

$$=\frac{स(स-१)(स-२)\ldots\ldots(स-न+१)}{१\times२\times३\ldots\ldots न}य^{न}$$

सामान्यपदाच्या गुणकाच्या अंशांतील एखादा अवयव शून्य असल्याशिवाय तो गुणक कदापि शून्य होत नाही. आता न हा सदैव घनपूर्णांक असल्यामुळें, स घनपूर्णांक असल्याशिवाय अंशांतील एकहि अवयव शून्य होणार नाही.

म्हणून स घनपूर्णांक नसल्यास $(१+य)^{स}$ च्या विस्तारांत पदांची संख्या अनंत असते.

१२.५१ कांही सोडवलेलीं उदाहरणें.

$(१-य)^{-\frac{१}{२}}$ च्या विस्तारांतील सामान्य पद काढा.

$(न+१)$ वें पद

$$=\frac{-\frac{१}{२}\left(-\frac{१}{२}-१\right)\left(-\frac{१}{२}-२\right)\ldots\ldots\left(-\frac{१}{२}-न+१\right)}{१\cdot२\cdot३\cdot४\ldots\ldots\ldots न}(-य)^{न}$$

$$=\frac{-१(-३)(-५)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(-२न+१)}{२^{न}\ १\cdot२\cdot३\ldots\ldots\ldots\ldots न}(-य)^{न}$$

अशांत न अवयव आहेत, आणि त्यांपैकी प्रत्येक ऋण आहे. म्हणून

(न+१) वें पद

$$=(-)^{२न} \frac{१\cdot३\cdot५\ldots\ldots(२न-१)}{२^{न} \underline{|न}} य^{न}$$

$$=\frac{१\times३\times५\ldots\ldots(२न-१)}{२^{न} \underline{|न}} य^{न}$$

उदाहरण २—

$(१-य)^{-२}$ च्या विस्तारांतील सामान्यपद.

(न+१)वें पद

$$=\frac{(-२)(-३)\ldots\ldots\ldots\ldots(-२-न+१)}{१\cdot२\cdot३\ldots न}(-य)^{न}$$

$$=\frac{२\cdot३\ ४\ldots\ldots\ न\ (न+१)}{१\cdot२\ ३\ldots\ldots न}\ य$$

अंश आणि छेद यांतील साधारण अवयवांचा लोप करून

(न+१)वें पद $=(न+१)य^{न}$

१२.५२ $(१-य)^{-च}$ च्या विस्तारांतील सामान्य पदाचें अति सरळ रूप.

(न+१)वें पद $= प_{न+१}$

$$=\frac{(-स)(-स-१)(-स-२)\ldots(-स-न+१)}{१\times२\times३\ldots\ldots न}(-य)^{न}$$

$$=(-१)^{न}\frac{(स)(स+१)(स+२)\ldots\ldots(स+न-१)}{१\times२\times३\ldots\ldots न}(-य)^{न}$$

$$=(-१)^{२न}\frac{स\,(स+१)\,(स+२)\ldots\ldots(स+न-१)}{\lfloor न}य^{न}$$

$$=\frac{स\,(स+१)\,(स+२)\ldots\ldots(स+न-१)}{\lfloor न}य^{न}$$

या सामान्य पदावरून असें दिसून येतें की $(१-य)^{-स}$ च्या विस्तारांत प्रत्येक पद धन आहे.

स ला १, २, ३........या अर्हा दिल्यास

$$(१-य)^{-१}=१+य+य^{२}+य^{३}\ldots\ldots+य^{न}+\ldots\ldots$$

$$(१-य)^{-२}=१+२य+३य^{२}+४य^{३}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+(न+१)य^{न}+\ldots\ldots$$

$$(१-य)^{-३}=१+३य+६य^{२}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{(न+१)\,(न+२)}{१\times२}य^{न}+\ldots\ldots$$

उदाहरण १— $\frac{१}{\sqrt[५]{१-५य}}$ च्या विस्तारांतील सामान्य-पद काढा.

आता $\frac{१}{५\sqrt{१-५य}} = (१-५य)^{-\frac{१}{५}}$

(न+१)वें पद

$$= \frac{\frac{१}{५}\left(\frac{१}{५}+१\right)\left(\frac{१}{५}+२\right)\ldots\ldots\left(\frac{१}{५}+न-१\right)}{१\times२\times३\ldots\ldots\ldots न}(५य)^{न}$$

$$= \frac{१\times६\times११\ldots\ldots\times(५न-४)}{५^{न}\,\underline{|न}}५^{न}\times य^{न}$$

$$= \frac{१\times६\times११\ldots\ldots\ldots(५न-४)}{\underline{|न}}य^{न}$$

१२.६ '$(१+य)^{स}$ च्या विस्तारांतील पदांचीं चिह्नें—

आता $(१+य)^{स} = १+सय+\frac{स(स-१)}{१\times२}य^{२}$

$$+\frac{स(स-१)(स-२)}{१\times२\times३}य^{३}+\ldots\ldots$$

$$प_{न+१} = \frac{स(स-१)(स-२)\ldots\ldots(स-न+१)}{१\times२\times३\ldots\ldots न}य^{न}$$

$$प_{न} = \frac{स(स-१)(स-२)\ldots\ldots(स-न+२)}{१\times२\times३\ldots\ldots\times(न-१)}य^{न-१}$$

$$\frac{प_{न+१}}{प_न} = \frac{स-न+१}{न} य$$

यावरून $प_न$ ला $\frac{स-न+१}{न} \times य$ ने गुणिल्यास $प_{न+१}$ हें पद मिळतें.

$$आता, \frac{स-न+१}{न} य = \left\{\frac{स+१}{न} - १\right\} य$$

आता,

(१) (स+१) ऋण असल्यास, त्याचप्रमाणे

(२) (स+१) ची कांहीहि असून न>स+१

असल्यास, $\left\{\frac{स+१}{न} - १\right\}$ ऋणच राहते.

म्हणून य धन आणि न>स+१ असल्यास (न+१) वें पद आणि न वें पद यांची निष्पत्ति सदैव ऋण राहते. म्हणून, जेव्हा न हा (स+१) पेक्षा अधिक असा पहिला धनपूर्णांक असतो तेव्हा $(१+य)^स$ च्या विस्तारांत न च्या पदानंतरचीं पदें एकांतरानें (alternately) धन आणि ऋण असतात.

य ऋण असल्यास आणि न >स+१ असल्यास (न+१) वें पद आणि न वें पद यांची निष्पत्ति सदैव धनच राहते. म्हणून न च्या पदाच्या चिह्नाप्रमाणेच त्याच्या पुढील पदांचीं चिह्नें राहतात. याचा एक विशिष्ट प्रकार म्हणजे स ऋण असल्यास $(१-य)^स$ च्या विस्तारांतील प्रत्येक पद धन असतें हा होय.

१२.७ स परिमेय (rational) असल्यास $(१+य)^स$ च्या विस्तारांतील, संख्येने महत्तम पद काढणें.

संख्येने महत्तम पद काढावयाचें आहे म्हणून य ला सर्वत्र धन मानलें आहे. स धन पूर्णांक असल्यास महत्तम पद कोणतें असतें तें आपण ११·६ च्या अनुच्छेदांत ठरविलें आहे.

आता, स ची अहं ऋण, किंवा भिन्न असल्यास $-१ < य < १$ या अहांकरिता द्विपद विस्तार सत्य आहे हें आपण पाहिलेंच आहे. $-१<य<१$ असतांना $(१+य)^स$ च्या विस्तारांतील महत्तम पद कोणतें तें आपण ठरवूं.

प्रकार १ ला. समजा स हा एक धन भिन्न आहे.

$$\text{आता}\; प_{न+१} = \frac{स-न+१}{न}\, य \times प_न$$

$$= \left(\frac{स+१}{न} - १\right) य \times प_न$$

$\left(\frac{स+१}{न} - १\right) य$ हा अवयव $न < स+१$ असेपर्यंत धनच राहतो. आणि नंतर तो ऋण होतो. परंतु संख्येने १ पेक्षा लहानच असतो.

$$\text{आता}\; \left(\frac{स+१}{न} - १\right) य \gtreqless १ \;\text{तदनुसार}\; प_{न+१} \gtreqless प_न$$

$$\text{अर्थात}\; न \lesseqgtr \frac{स+१}{१+य} \;\text{य तदनुसार}\; प_{न+१} \gtreqless प_न$$

(१) $\left(\frac{स+१}{१+य}\right)$ य हा पूर्णांक असून त समान आहे,

असें समजा.

(अ) आता (त − १) पर्यंत न च्या सर्व अर्हा $\frac{स+१}{१+य}$ य पेक्षा लहान आहेत.

म्हणून न च्या या सर्व अर्हांकरिता प्रत्येक पद पूर्वगामी पदापेक्षा अधिक आहे.

अर्थात् $प_त > प_{त-१} > प_{त-२} \cdots\cdots\cdots > प_२ > प_१$

ह्या सर्व पदांत $प_त$ हेंच महत्तम पद आहे.

(आ) न = त असल्यास $प_त = प_{त+१}$

(इ) न ला, त + १, त + २, त + ३,...... या अर्हा दिल्यास $न > \frac{स+१}{१+य}$ य आणि म्हणून

$प_{त+१} > प_{त+२} > प_{त+३} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

या सर्व पदांमध्ये $प_{त+१}$ हें महत्तम पद आहे.

यावरुन $\frac{स+१}{१+य}$ य हा पूर्णांक असून त समान असल्यास $प_त$ आणि $प_{त+१}$ हीं दोन महत्तम पदें येतात आणि तीं परस्परांसमान असतात.

(२) समजा $\frac{स+१}{१+य}$ य हा भिन्न असून त्याचा पूर्णांक भाग थ आहे.

(अ) आता न च्या थ पर्यंत सर्व अर्हांकरिता

$$न < \frac{स+१}{१+य} \times य$$

म्हणून $प_{थ+१} > प_{थ} > प_{थ-१} > \ldots\ldots > प_{२} > प_{१}$

म्हणजेच $प_{थ+१}$ हें महत्तम पद आहे.

(आ) आता, न च्या थ $+१$, थ$+२$, थ$+३$ या अर्हांकरिता

$$न > \frac{स+१}{१+य} य$$

म्हणून $प_{थ+१} > प_{थ+२} > प_{थ+३} > \ldots\ldots > \ldots\ldots,$

म्हणजेच $प_{थ+१}$ हें महत्तम पद आहे

यावरून $\frac{स+१}{१+य}$ य हा भिन्न असल्यास $प_{थ+१}$ हें महत्तम पद आहे.

प्रकार २ रा. समजा स ऋण आहे.

आता म ही धन राशि अशी घ्या की स $= -$म

$\frac{स-न+१}{न}$ य या अवयवाची चिह्ननिरपेक्ष

यहाँ $\frac{म+न-१}{न}$ य किंवा $\left(\frac{म-१}{न}+१\right)$ य आहे.

आता $\left(\frac{म-१}{न}+१\right)य \gtreqless १$ असल्यास

किंवा न $\lesseqgtr \frac{म-१}{१-य}$ य असल्यास $प_{न+१} \gtreqless प_न$

(१) जर $\left(\frac{म-१}{१-य}\right)$ य धन पूर्णांक असून त समान असेल तर पहिल्या प्रकाराप्रमाणेच $प_{त+१}$ आणि $प_त$ हीं दोन पदें समान असून महत्तम असतात.

जर $\left[\frac{म-१}{१-य}\right]$ य धन भिन्न असून थ हा त्याचा पूर्णांक भाग असेल तर $प_{थ+१}$ हें महत्तम पद आहे.

(२). जर $\frac{म-१}{१-य}$ य ऋण असेल तर म १ पेक्षा लहान होतो आणि $\frac{स-न+१}{न}$ य हा अवयवसुद्धा १ पेक्षा लहान होतो. म्हणून प्रत्येक पद पूर्वगामी पदापेक्षा लहान होतें. अर्थात् पहिलें पदच महत्तम पद होतें..

१२.७१ उदाहरण— $य=\frac{१}{३}$, आणि स = १५ या अहीं

करिता $(१+य)^{-म}$ ह्या विस्तारांतील महत्तम पद काढा.

$$\text{आता } प_{न+१} = \frac{म+न-१}{न}\, य\; प_न \quad (\text{सर्वत्र}$$

$$= \frac{१५+न-१}{न} \times \frac{१}{३}\, प_न$$

$$= \frac{१४+न}{३न}\, प_न$$

किंवा $१४ + न \gtreqless ३\,न$

किंवा $न \lesseqgtr ७$ असल्यास $प_{न+१} \gtreqless प_न$

$न < ७$ असल्यास म्हणजेच $न = १, २, ३, \ldots\ldots ६$ असल्यास

$प_७ > प_६ > प_५ > \ldots\ldots > प_२ > प_१$

आता $न = ७$ घेतल्यास $प_८ = प_७$

आणि $न > ७$ असल्यास म्हणजेच

$न = ८, ९, १० \ldots\ldots$ असल्यास

$प_८ > प_९ > प_{१०} > \ldots\ldots\ldots\ldots$

यावरून $प_७$ आणि $प_८$ हीं पदें महत्तम असून समान आहेत.

## १२.८ कांहीं सोडविलेलीं उदाहरणें

उदाहरण १— य च्या लघुतम अर्हांकरिता य चा द्विघात आणि उच्चतम घात उपेक्ष्य समजल्यास

$$\frac{\sqrt[३]{१-\frac{३}{७}य} + \left(१-\frac{३}{५}य\right)^{-५}}{\sqrt[४]{१+\frac{१}{२}य} + \sqrt[६]{१-\frac{७}{३}य}}$$ ची अर्हा काढा.

य चा द्विघात आणि उच्चतम घात उपेक्ष्य असल्यामुळे प्रत्येक विस्तार केवळ य च्या एकघाती पदापर्यंतच करावा. दिलेली राशि

$$= \frac{\left(१-\frac{३}{७}य\right)^{\frac{१}{३}} + \left(१-\frac{३}{५}य\right)^{-५}}{\left(१+\frac{१}{२}य\right)^{\frac{१}{४}} + \left(१-\frac{७}{३}य\right)^{\frac{१}{६}}}$$

$$= \frac{\left(१-\frac{१}{३}\times\frac{३}{७}य+\ldots\right)\left[१+(-५)\left(-\frac{३}{५}य\right)+\ldots\ldots\right]}{\left(१+\frac{१}{४}\times\frac{१}{२}य+\ldots\ldots\right)+\left(१-\frac{१}{६}\times\frac{७}{३}य+\ldots\ldots\right)}$$

$$= \frac{१ - \frac{१}{७}य + १ + ३य}{१ + \frac{१}{८}य + १ - \frac{१}{३}य}$$

$$= \frac{२ + \frac{२०}{७}य}{२ - \frac{५}{२४}य}$$

$$= \frac{१ + \frac{१०}{७}य}{१ - \frac{५य}{४८य}}$$

$$= \left(१ + \frac{१०}{७}य\right)\left(१ - \frac{५}{४८}य\right)^{-१}$$

$$= \left(१ + \frac{१०}{७}य\right)\left(१ + \frac{५}{४८}य\right)$$

$$= १ + \frac{१०}{७}य + \frac{५}{४८}य + \ldots\ldots$$

क्रियात उपेक्ष्य समजून दिलेली राशि

$$= १ + \frac{५१५}{३३६}य$$

उदाहरण २— $\frac{१}{\sqrt{९९}}$ ची किंमत ८ दशांशस्थानापर्यंत अचूक काढा.

$$\frac{१}{\sqrt{९९}} = (९९)^{-\frac{१}{२}}$$

$$= (१०^{२} - १)^{-\frac{१}{२}}$$

$$= \frac{१}{१०}\left[१ - \frac{१}{१०^{२}}\right]^{-\frac{१}{२}}$$

$$= \frac{१}{१०}\Bigg[१ + \left(-\frac{१}{२}\right)\left(-\frac{१}{१०^{२}}\right)$$

$$+ \frac{\left(-\frac{१}{२}\right)\left(-\frac{१}{२}-१\right)}{१\times२}\left(-\frac{१}{१०^{२}}\right)^{२}$$

$$+ \frac{\left(-\frac{१}{२}\right)\left(-\frac{१}{२}-१\right)\left(-\frac{१}{२}-२\right)}{१\times२\times३}\left(-\frac{१}{१०^{२}}\right)^{३} + \cdots\Bigg]$$

$$= \frac{१}{१०}\Bigg[१ + \frac{१}{२}\times\frac{१}{१०^{२}} + \frac{१\times३}{२^{३}\times१०^{४}}$$

$$+ \frac{१\times३\times५}{१\times२\times३\times२^{३}}\times\frac{१}{१०^{६}} + \cdots\cdots\Bigg]$$

$$= \frac{१}{१०} + \frac{१}{२\times१०^{३}} + \frac{१\times३}{२^{३}\times१०^{५}}$$

$$+ \frac{१\times३\times५}{२^{४}\times१०^{७}} + \cdots\cdots$$

आता प्रत्येक पदास दशांशाचें रूप द्या.

पहिलें पद $= \frac{१}{१०} = \cdot १$

दुसरें पद $= \frac{१}{२ \times १०^{३}} = \cdot ०००५$

तिसरें पद $= \frac{१ \times ३}{२^{३} \times १०^{५}} = \cdot ००००० ३७५$

चवथें पद $= \frac{१ \times ५}{२^{४} \times १०^{७}} = \cdot ०००००००३१२५$

चवथ्या पदांत ८ दशांश स्थानापर्यंत शून्येंच आहेत.

$$\therefore \frac{१}{\sqrt{९९}} = \cdot १ + \cdot ०००५ + \cdot ०००००३७५$$

$$+ \cdot ००००००००३१२$$

$$= \cdot १००५०३७५$$

$$= \cdot १००५०३७८$$

उदाहरण ३— $(१+य+य^{२})^{-१}$ च्या विस्तारांतील $य^{१०}$ चा गुणक काढा. [नागपूर १९३१

$$(१+य+य^{२})^{-१} = \frac{१}{१+य+य^{२}}$$

$$= \frac{१-य}{(१-य)(१+य+य^{२})}$$

$$= \frac{१-य}{१-य^{३}}$$

$$=(१-य)(१-य^३)^{-१}$$

$$=(१-य)(१+य^३+य^६+य^९+य^{१२}+\ldots\ldots\infty)$$

यांत $य^{१०}$चा गुणक $-१$ आहे हें सहज समजून येतें.

उदाहरण ४— द्विपद् प्रमेय द्वारा

$$१+\frac{१}{४}+\frac{१\times३}{४\times८}+\frac{१\times३\times५}{४\times८\times१२}+\ldots\ldots\infty=\sqrt{२}$$

हें सिध्द् करा.

दिलेली श्रेढी अन्यप्रकारें लिहतां येते ती अशी

$$१+\frac{१}{२\times२}+\frac{\frac{१}{२}\times\frac{३}{२}}{१\times२}\times\frac{१}{२^२}+\frac{\frac{१}{२}\times\frac{३}{२}\times\frac{५}{२}}{१\times२\times३\times२^३}+\ldots\infty$$

$$=१+\left(-\frac{१}{२}\right)\left(-\frac{१}{२}\right)+\frac{\left(-\frac{१}{२}\right)\left(-\frac{१}{२}-१\right)}{१\times२}\left(-\frac{१}{२}\right)^२$$

$$+\frac{\left(-\frac{१}{२}\right)\left(-\frac{१}{२}-१\right)\left(-\frac{१}{२}-२\right)}{१\times२\times३}\left(-\frac{१}{२}\right)^३+\ldots\infty$$

पण हा $\left(१-\frac{१}{२}\right)^{-\frac{१}{२}}$ चा विस्तार आहे.

$\therefore$ दिलेली श्रेढी $=\left(१-\frac{१}{२}\right)^{-\frac{१}{२}}$

$= \left(\frac{१}{२}\right)^{-\frac{१}{२}}$

$= \sqrt{२}$

## प्रश्नसंग्रह १८

(१) खालील विस्तारांतील $(न+१)$वें पद काढा—

(१) $(१+य)^{-\frac{३}{२}}$ (२) $(१-य)^{-\frac{१}{२}}$

(३) $(१+२य)^{\frac{१}{२}}$ (४) $(१+य^{२})^{-२}$

(५) $(३-य)^{-३}$ (६) $\frac{१}{\sqrt[स]{क-य}}$

(७) $\frac{१}{\sqrt[३]{(१-२य)^{२}}}$ (८) $\frac{१}{\sqrt[४]{(१-३य)}}$

(२) (१) $(१-५य)^{-\frac{३}{४}}$; $(क^{३}+३खय^{२})^{-५}$ आणि

(३) $\left(\frac{य^{\frac{३}{२}}}{२}-\frac{२}{य^{\frac{१}{२}}}\right)^{-१४}$ यांच्या विस्तारात

क्रमशः $य^{७}$, $य^{६}$ आणि $य^{०}$ यांचे गुणक काढा.

(३) $(१-४य)^{\frac{१}{२}}$ चा विस्तार ४ पदापर्यंत लिहा.

[कलकत्ता १९२३

(४) $(क^{२}-२कय)^{\frac{३}{२}}$ चा विस्तार $य^{५}$ पर्यंत य च्या आरोही घातांत करा आणि त्यांतील सामान्यपद लिहा.

(५) $(क^{२}+य)^{\frac{१}{२}}$ चा ५ पदापर्यंत विस्तार करा.

(६) $(१-३य)^{\frac{७}{३}}$ च्या विस्तारांतील $य^{न}$ चा गुणक काढा.

(७) $\frac{(१+य)^{२}}{(१-य)^{३}}$ च्या विस्तारांतील $य^{न}$ चा गुणक काढा.

(८) खालील विस्तारांतील य च्या दिलेल्या अंकांकरिता महत्तम पदें काढा.

(१) $(१+य)^{\frac{११}{२}}$, $य=\frac{१}{३}$

(२) $(१+य)^{-९}$, $य=\frac{४}{९}$

(३) $(१-य)^{-\frac{७}{३}}$, $य=\frac{१३}{१५}$

(९) खालील राशींच्या निर्दिष्ट दशांश स्थानापर्यंत अर्हा काढा.

(१) $(४·०८)^{\frac{१}{२}}$ ...... ६ दशांश स्थानापर्यंत

(२) $(१·०४)^{\frac{१}{१०}}$ ...... ४ ,, ,,

(३) $(१·००२)^{५}$ ...... ६ ,, ,,

(४) $(८·१६)^{-\frac{१}{३}}$ ... ४ ,, ,,

(१०) खालील विस्तारांत य च्या, यथानिर्दिष्ट घातांचे गुणक काढा.

(१) $\frac{१+य}{(१-य)^{३}}$ च्या विस्तारांत, $य^{१०}$ चा.
[कलकत्ता १९३७

(२) $\frac{१-२य}{(३+२य-य^{२})}$ च्या विस्तारांत, $य^{४}$ चा.

[कलकत्ता १९०९

(३) $\frac{१+य}{१-य}$ च्या विस्तारांत, $य^{५}$ चा.
[कलकत्ता १९१९

(४) $(१-९य+२०य^{२})^{-१}$ च्या विस्तारांत, $य^{स}$ चा.
[मुंबई १८९३

(५) $\frac{(१+३य)^{२}}{(१+२य)^{२}}$ च्या विस्तारांत, $य^{स}$ चा [मुंबई १८९१

(११) $-१<य<१$ असल्यास

$$(१+य+य^{२}+य^{३}+\ldots\ldots)^{२}=१+२य+३य^{२}+४य^{३}+\ldots\ldots+सय^{स-१}+\ldots\ldots$$

हें सिद्ध करा.

(१२) $-१<य<१$ असल्यास
$(१+२य+३य^{२}+४य^{३}+\ldots\ldots)^{५}$ च्या विस्तारांत $य^{४}$ चा गुणक काढा.

पुढील १३ ते १६ या उदाहरणांत य इतका लघुतम आहे की य चा द्विघात आणि उच्चतर घात उपेक्ष्य समजले तर सिद्ध करा—

(१३) $$\frac{(८+३य)^{\frac{२}{३}}}{(२+३य)\sqrt{४-५य}} = १-\frac{५य}{८} \text{ (ढोकळमानाने)}$$

[नागपूर १९३३

(१४) $$\frac{\left(१+\frac{३}{२}य\right)^{-७}+(१-२य)^{-१}}{\left(१+\frac{७}{२}य\right)^{-३}+(१+य)^{-२}} = १+२य$$

(ढोकळमानाने)

(१५) $$\frac{(१-३य)^{\frac{१}{२}}+(१-य)^{\frac{५}{३}}}{(४+य)^{\frac{१}{२}}} = १-\frac{४१}{२४}य \quad \text{(ढोकळमानाने)}$$

[नागपूर १९५६

(१६) $$\frac{(९+२य)^{\frac{१}{२}}(३+४य)}{(१-य)^{\frac{१}{५}}} = ९+\frac{७४}{५}य \text{ (ढोकळमानाने)}$$

द्विपद प्रमेयद्वारा खालील अनंत श्रेढींचे योग काढा.

(१७) $$१+\frac{२}{१}\times\frac{१}{३^{२}}+\frac{२\times५}{१\times२}\times\frac{१}{३^{४}}$$

$$+\frac{२\times५\times८}{१\times२\times३}\times\frac{१}{३^{३}}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(१८) $१+\frac{१}{३}+\frac{१}{३}\times\frac{३}{६}+\frac{१}{३}\times\frac{३}{६}\times\frac{५}{९}+\ldots$

[अलाहाबाद १९२९

(१९) $१+\frac{३}{४}+\frac{३\times५}{४\times८}+\frac{३\times५\times७}{४\times८\times१२}+\ldots\ldots$

(२०) $\frac{३}{१}+\frac{३\times५}{१\times२}\times\frac{१}{३}+\frac{३\times५\times७}{१\times२\times३}\times\frac{१}{३^{२}}+\ldots\ldots$

[मद्रास १९४०

(२१) $\frac{ट}{ठ}$ इतका लघुतम आहे की त्याचे द्विघात घन आणि उच्चतर घात उपेक्ष्य आहेत.

तर $\left(\frac{ठ}{ठ+ट}\right)^{\frac{१}{२}}+\left(\frac{ठ}{ठ-ट}\right)^{\frac{१}{२}}$ ची अर्हा जवळ जवळ $२+\frac{३ट^{२}}{४ठ^{२}}$ च्या समान आहे हें सिद्ध करा.

[नागपूर १९२७

(२२) $$\frac{७}{५}\left(१+\frac{१}{१०^{२}}+\frac{१\times३}{१\times२}\times\frac{१}{१०^{४}}+\frac{१\times३\times५}{१\times२\times३}\times\frac{१}{१०^{६}}+\ldots\ldots\infty\right)=\sqrt{२}$$

आहे हें दाखवा.

प्रतिच्छेदा (antilogarithms)— जर य ही र ची क -आधारी छेदा असेल तर र ला य ची क -आधारी प्रतिच्छेदा म्हणतात.

१३.११ उदाहरण १—

$$२^६ = ६४ \text{ म्हणून } छे_२ ६४ = ६$$

उदाहरण २— $३^{-४} = \frac{१}{८१}$ म्हणून $छे_३ \left(\frac{१}{८१}\right) = -४$

उदाहरण ३— $३^{\frac{३}{४}} = \sqrt[४]{२७}$

$$\text{म्हणून } छे_३ \sqrt[४]{२७} = \frac{३}{४}$$

उदाहरण ४— क ही कोणतीहि राशि असली तरी

$$क^१ = क \text{ म्हणून } छे_क क = १$$

उदाहरण ५— $क^० = १$ म्हणून $छे_क १ = ०$

वरील उदाहरणांवरून खालील विधानें निष्पन्न होतात.

(१) छेदा धन किंवा ऋण; पूर्णांक, अथवा भिन्न असूं शकते.

(२) एखाद्या राशीच्या छेदेचा आधार जर तीच राशि असेल तर छेदेची अर्हा एक असते.

(३) एकची छेदा —कोणताहि आधार असला तरी— शून्यच असते.

१३.२ या अनुच्छेदांत छेदांविषयी कांही प्रमेयें सिद्ध केलीं आहेत.

(१) दोन राशींच्या गुणाकाराची, दत्ताधार छेदा त्या दोन राशींच्या त्याच आधारी छेदांच्या योगासमान असते.

अर्थात् $छे_{क}(म \times न) = छे_{क}म + छे_{क}न$

समजा $य = छे_{क}म$ म्हणून $क^{य} = म$

आणि $र = छे_{क}न$ म्हणून $क^{र} = न$

आता $म \times न = क^{य}क^{र}$

$= क^{य+र}$

म्हणून परिभाषेनुसार $य + र = छे_{क}(म \times न)$. य आणि र च्या अर्हांचा आदेश करून $छे_{क}(म \times न) = छे_{क}म + छे_{क}न$

, (२) पखाद्या लब्धीची दत्ताधार छेदा ही, भाज्याच्या त्याच आधारी छेदेतून भाजकाची त्याच आधारी छेदा उणे करून येणाऱ्या राशीसमान असते.

अर्थात् $छे_{क}\left(\frac{म}{न}\right) = छे_{क}म - छे_{क}न$

समजा $य = छे_{क}म$ म्हणून $क^{य} = म$

आणि $र = छे_{क}न$ म्हणून $क^{र} = न$

आता $\frac{म}{न} = \frac{क^{य}}{क^{र}}$

$= क^{य-र}$

म्हणून परिभाषेनुसार $(य - र) = छे_{क}\left(\frac{म}{न}\right)$

य आणि र च्या अर्हांचा आदेश करून

$$छे_क\left(\frac{म}{न}\right) = छे_क म - छे_क न$$

उदाहरण १—

$$छे_क \ (२३ \times ६५) = छे_क २३ + छे_क ६५$$
$$= छे_क(११ \times ३) + छे_क(१३ \times ५)$$
$$= छे_क ११ + छे_क ३ + छे_क ५ + छे_क १३$$

उदाहरण २—

$$छे_क \frac{(१७ \times २३७ \times ४७)}{(२३ \times ५७)}$$
$$= छे_क(१७ \times २३७ \times ४७) - छे_क(२३ \times ५७)$$
$$= छे_क १७ + छे_क २३७ + छे_क ४७ - छे_क २३ - छे_क ५७$$
$$= छे_क १७ + छे_क(३ \times ७९) + छे_क ४७ - छे_क २३ - छे_क(१९ \times ३)$$
$$= छे_क १७ + छे_क ३ + छे_क ७९ + छे_क ४७ - छे_क २३ - छे_क १९ - छे_क ३$$
$$= छे_क १७ + छे_क ७९ + छे_क ४७ - छे_क २३ - छे_क १९$$

(२) एखाद्या घातास उन्नयन केलेल्या राशीची दत्ताधार छेदा ही तो घात आणि त्याच राशीची त्याच आधारी छेदा यांच्या गुणाकारासमान असते.

अर्थात् $छे_क(म^न) = न \ छे_क म$. हे प्रमेय न च्या सर्व अर्हांकरिता सत्य आहे.

समजा $य = छे_क म$ म्हणून $क^य = म$

आता $म^{न} = (क^{य})^{न} = क^{यन}$

म्हणून परिभाषेनुसार $छे_{क}म^{न} = नय$

य च्या अर्हेचा आदेश करून

$$छे_{क}म^{न} = न \times छे_{क}म$$

$\sqrt[१७]{९९९}$ ची अर्हा प्रत्यक्ष रीतीने काढणें फार कठीण आहे. पण छेदेच्या मदतीने ९९९चें १७ वें मूळ काढण्याचें काम फारच सोपें होतें.

$\sqrt[१७]{९९९}$ ची छेदा घेतल्यास

$$छे_{१०} \sqrt[१७]{९९९} = \frac{१}{१७} छे_{१०}(९९९)$$

$\frac{१}{१७}$ छे$_{१०}$ (९९९) ची अर्हा कशी निश्चित करतात हें पुढे सांगितलेंच आहे. दक्षिण पक्षाची अर्हा निश्चित केल्यानंतर प्रतिच्छेदेच्या सारणीवरून इष्ट मूळ काढतां येते.

१३.२१ वरील प्रमेयांत गुणाकार आणि भागाकार यांच्या क्रियांऐवजी योग आणि वियोग या क्रिया आणि घातास उन्नयन केलेल्या राशीची अर्हा काढण्याच्या रीतीऐवजी गुणाकार ही क्रिया उपयोगांत आणावी लागते.

गुणाकार, भागाकार, वर्गमूळ...आदि गुंतागुंतीच्या विधि सुकर करण्याकरिता छेदाच्या प्रमेयांचा उपयोग करतात. ह्याच उद्देशाने सर्व संख्यांच्या छेदांचें, प्रमाप (standard) आधारी, कांही दशांश स्थानापर्यंत, परिगणन करून ठेवलेलें आहे. तात्त्विक विवेचनांत (in theory) 'घा' (हिचा अर्थ

पुढील प्रकरणांत स्पष्ट केला जाईल) ही राशि छेदेचा आधार घेतली असून व्यवहारांत (in practice) १० हा अंक आधार घेऊन छेदांचें परिगणन केलेलें आहे.

दहा-आधारी छेदेस साधारण छेदा (common logarithm) म्हणतात.

कोणत्याहि आधारी —समजा स आधारी— छेदा काढावयाची असल्यास घा आधार घेऊन छेदेचें परिगणन करून नंतर या चें स मध्ये परिवर्तन करतात.

बीजीय अनुसंधान करतांना प्रथम घा आधारीच छेदा विचारांत घेतल्या गेल्या म्हणून घा–आधारी छेदेस प्राकृतिक छेदा (natural logarithm) म्हणतात.

१३.३ प्रत्येक छेदा नेहमी धन आणि पूर्णांक असतेच असें नाही, हें खालील उदाहरणांवरून स्पष्ट होईल.

समजा न हा कोणतीहि राशि असून $१०^{य} = न$. म्हणून $छे_{१०} न = य$

आता न =५१२ घेतल्यास

$५१२ < १०^{३}$ पण $> १०^{२}$

अथवा $१०^{२} < ५१२ < १०^{३}$

म्हणून $५१२ = १०^{२+\text{लघ्वंश भिन्न}}$

म्हणून $छे_{१०} ५१२ = २ +$ एखादा लघ्वंश भिन्न

किंवा ५१२ ची छेदा २ आणि ३ च्या मधील भिन्न आहे.

आता न = ·०४ घ्या.

$·०४ > १०^{-१}$ आणि $< १०^{-१}$

किंवा $१०^{-२} < \cdot०४ < १०^{-१}$

किंवा $१०^{-२+\text{लघ्वंश भिन्न}} = \cdot०४$

म्हणून $छे_{१०} (\cdot०४) = -२+$ लघ्वंश भिन्न

किंवा ·०४ ची छेदा ऋण भिन्न आहे.

१३.३१ लक्षण आणि दशमिकांश [characteristic and mantissa]

परिभाषा— एखाद्या राशीची छेदा अंशतः पूर्णांक आणि अंशतः अपूर्णांक असेल तर तिच्या पूर्णांक भागाला छेदेचें लक्षण आणि अपूर्णांक भागाला छेदेचा दशमिकांश म्हणतात.

१३.४ कोणत्याहि राशीच्या दहा-आधारी छेदेचें लक्षण केवळ निरीक्षणानेच निश्चित करतां येतें.

(१) एक पेक्षा अधिक असलेल्या संख्येच्या छेदेचें लक्षण निश्चित करणें.

आता $१०^{१} = १०$

$१०^{२} = १००$

$१०^{३} = १०००$

..................

..................

यावरून असें दिसून येतें की जिच्यांतील पूर्णांक अंगांत दोन अंक आहेत अशी संख्या $१०^{१}$ आणि $१०^{२}$ यांमधे असते. पुन्हा, जिच्यांतील पूर्णांक अंगांत तीन अंक आहेत अशी संख्या $१०^{२}$ आणि $१०^{३}$ यांमधे असते. सामान्यतः

ज्या संख्येतील पूर्णांक अंगांत स अंक आहेत अशी संख्या $१०^{स-१}$ आणि $१०^{स}$ यामध्ये असते.

समजा, न या राशीचें पूर्णांक अंग स अंकी आहे.

तेव्हा $न = १०^{(स-१) + लघ्वंश भिन्न}$

$\therefore$ $छे_{१०}$ न = स − १ + लघ्वंश भिन्न

यावरून $छे_{१०}$न चें लक्षण (स − १) आहे. अर्थात् १ पेक्षा अधिक असलेल्या कोणत्याहि राशीच्या छेदेंचें लक्षण सदैव धन असून, तें त्या राशीच्या पूर्णांक अंगांतील अंकांपेक्षा १ नें कमी असतें

(२) १ पेक्षा लहान असलेल्या दशमिक भिन्नाच्या छेदेंचें लक्षण ऋण असून तें त्यांत दशमिक चिह्नानंतर लगेच असणाऱ्या शून्याच्या अंकांपेक्षा १ नें अधिक असतें.

आता $१०^{०} = १$

$$१०^{-१} = \frac{१}{१०} = \cdot१$$

$$१०^{-२} = \frac{१}{१०^{२}} = \cdot०१$$

$$१०^{-३} = \frac{१}{१०^{३}} = ००१$$

.......... ..................

.............................

यावरून असे दिसून येतें की, दशमिक चिह्नानंतर लगेच एकहि शून्य नसलेला कोणताहि दशांश भिन्न $१०^{-१}$

आणि १०°.यांच्यामध्ये असतो. दशमिक चिह्नानंतर लगेच १ शून्य असलेला कोणताहि दशमिक भिन्न $१०^{-२}$ आणि $१०^{-१}$ यामध्ये असतो. दशमिक चिह्नानंतर लगेच २ शून्यें असलेला कोणताहि दशांश भिन्न $१०^{-३}$ आणि $१०^{-२}$ यांच्यामध्ये असतो.

सामान्यतः, दशमिक चिन्हानंतर लगेच द शून्यें असलेला दशमिक भिन्न $१०^{-(द+१)}$ आणि $१०^{-द}$ यांच्यामध्ये असतो. या दशमिक भिन्नाचें 'दा' ने प्रतिनिधान केल्यास

$$१०^{-द} > दा > १०^{-(द+१)}$$

$$\text{म्हणून } दा = १०^{-(द+१) + \text{लघ्वंश भिन्न}}$$

$$\therefore\ छे_{१०}\ दा = -(द+१) + \text{लघ्वंश भिन्न}$$

याप्रमाणे दशमिक चिह्नानंतर लगेच द शून्यें असलेल्या दा या दशमिक अपूर्णांकाच्या छेदेचें लक्षण $-(द+१)$ आहे.

१३.५ निरनिराळ्या राशींतील सार्थक (significant) अंकांचा क्रम तोच असल्यास त्या राशींच्या छेदांतील दशमिकांश समान असतात.

समजा, म आणि न या दोन राशींतील सार्थक अंकांचा क्रम एकच असून केवळ दशमिक चिह्नांचीच स्थानें निरनिराळीं आहेत.

आता कोणत्याहि राशीला १० च्या कोणत्याहि पूर्णांक घाताने गुणल्यास त्यांतील दशमिक चिह्नाच्या स्थानाचें विचलन होतें. यावरून न ला १० च्या विवक्षित पूर्णांक

यावाने गुणिल्यास गुणाकार म समान होईल. समजा त हा धन किंवा ऋण पूर्णांक असा आहे की

$$म = न \times १०^{त}$$

$$\therefore छे_{१०} म = छे_{१०} (न \times १०^{त})$$
$$= छे_{१०} न + छे_{१०} १०^{त}$$
$$= छे_{१०} न + त\, छे_{१०} १०$$
$$= छे_{१०} न + त$$

यावरून म आणि न यांच्या छेदातील फरक केवळ, त हा एक पूर्णांकच आहे.

म्हणून त्या दोन छेदांचे दशमिकांश समान आहेत. यावरून ज्या राशींच्या सार्थक अंकांचा क्रम तोच असतो त्यांच्या छेदांचे दशमिकांश समान असतात.

१३.५१ पूर्व अनुच्छेदांत दशमिकांश धन समजले गेले आहेत. सामान्य पद्धतींत छेदेचा दशमिकांश सदैव धनच राहील अशा रीतीने छेदा लिहिली जाते.

उदाहरणार्थ— छे (·००३) ची अर्दा काढल्यास तिचे लक्षण −३ आणि दशमिकांश ·४७७१ हीं येतात.

ह्यावरून ·००३ ची छेदा (−३+·४७७१) ही ऋण राशि येते. पण व्यवहारांत आपण दशमिकांश धन ठेवून फक्त लक्षणच ऋण ठेवतों लक्षणाचें ऋण चिह्न त्याच्या डोक्यावर लिहिण्याची पद्धत आहे.

छे (·००३) $= \bar{३}{\cdot}४७७१$ असें लिहितात.

यांत ·४७७१ ही धन राशि असून ३̄ ने −३ चा बोध होतो.

३̄·४७७१ आणि −३·४७७१ ह्या दोन निरनिराळ्या राशी आहेत हें नीट लक्षांत ठेवलें पाहिजे. पहिलींत पूर्णांकच केवळ ऋण असून दुसरी पूर्णतः ऋण आहे. जसें

३̄·४७७१ = −३ + ·४७७१ आणि

−३·४७७१ = −३ − ·४७७१

छेदेचा उपयोग करून प्रश्न सोडवितांना छेदेचें लक्षण, त्याचप्रमाणे दशमिकांश हीं दोन्ही ऋण येण्याचा संभव आहे. परंतु दशमिकांश धन करून घेण्याची पद्धत आहे. ती खालील उदाहरणांवरून स्पष्ट होईल.

उदाहरण — छे (१/३) ची अर्हा काढा.

छे १/३ = छे १०/३० = छे १० − छे ३०

= १ − (१·४७७१)

= − ·४७७१

परंतु दशमिकांश धन ठेवण्यासाठी − ·४७७१ ही राशि

−१ + (१ − ·४७७१) अशी लिहितां येते.

म्हणुन छे १/३ = −१ + (१ − ·४७७१)

= −१ + ·५२२९

= १̄·५२२९

यांत दशमिकांश धन आहे.

१३.६ निरीक्षणानें, एखाद्या राशीच्या छेदेचें लक्षण निश्चित करतां येतें हें आपण मागील अनुच्छेदांत पाहिलेंच आहे. सर्व संख्यांच्या छेदांच्या दशमिकांशाचें परिगणन ४ किंवा ७ दशांश स्थानापर्यंत अचूक करून तें गणिती सारणीच्या रूपांत दिलें गेलें आहे. एखाद्या राशीच्या छेदेचा दशमिकांश ह्या सारणींत कसा शोधावयाचा याची रीति खाली स्पष्ट केली आहे.

याकरिता आपण चार अंकी सारणीचाच उपयोग करूं. ह्या सारणीचा नमुना या प्रकरणाच्या शेवटीं दिला आहे.

उदाहरण १— छे ८८ ची अर्हा काढा.

छेदासारणीचें पहिले पृष्ठ उघडा.

अगदी डाव्या अंगास असलेल्या अंकस्तंभावर दृष्टी फेका. ८८ या संख्येशीं थांबा. ८८ च्या पंक्तीवरून नजर फिरवा. या पंक्तींत आणि शीर्षस्थानीं शून्य असणाऱ्या स्तंभामध्ये असलेली ९४४५ ही संख्या छे ८८ चा दशमिकांश आहे. [सारणीत दशमिक चिह्न गाळलेलें असतें तें विद्यार्थ्यांनी प्रत्येक वेळीं घेतलें पाहिजे.] १० आणि १०^२ यामध्ये ८८ असल्यामुळे छेदेचें लक्षण १ आहे.

म्हणून छे ८८ = १.९४४५.

(२) छे ५ ची अर्हा काढा.

छे ५ चा दशमिकांश छे ५० च्या दशमिकांशासमानच असतो.

छे ५० चा दशमिकांश, मागील उदाहरणांत सांगितल्या-

प्रमाणेच सारणींत पाहिल्यास ६९९० येतो. छे ५ चें लक्षण शून्य असतें.

म्हणून छे ५ = ०.६९९०

(३) छे ६३·८ ची अर्हा काढा.

छे ६३·८ आणि छे ६३८ यांचे दशमिकांश समान असतात.

परिशिष्टाच्या पहिल्या पृष्ठावर अंकस्तंभांत ६३ शोधा. ६३ च्या पंक्तीवरून नजर फिरवा. शीर्षस्थानीं ८ असणाऱ्या स्तंभामध्ये असणारी ८०४८ ही संख्या छे ६३८ किंवा ६३·८ यांचा दशमिकांश आहे.

आता छे ६३·८ चें लक्षण १ आहे.

म्हणून छे ६३·८ = १·८०४८

(४) छे ०·०८३४६ ची अर्हा काढा.

छे ·०८३४६ किंवा छे ८३४६ यांचे दशमिकांश समान असतात.

म्हणून परिशिष्टाच्या पहिल्या पृष्ठावर अगदी डाव्या अंगास असलेल्या अंकाच्या स्तंभांत ८३ शोधून काढा. ८३ च्या पंक्तीवरून नजर फिरवा. या पंक्तीत आणि शीर्षस्थानीं ४ असलेल्या स्तंभामध्ये असलेल्या ९२१२ या संख्येवर या. ·९२१२ हा छे८३४ चा दशमिकांश आहे. ८३ च्याच पंक्तीवरून पुढे जाऊन मध्यकांतरांच्या (mean difference) सारणींत शीर्षस्थानीं ६ असलेल्या स्तंभामध्ये ३ हा अंक (वस्तुतः ती राशि ·०००३ आहे) मिळेल.

·०००३ ही राशि ·९२१२ मध्ये मिळवा. म्हणजे ·९२१५ हा छे ०·०८३४६ चा दशमिकांश होतो. आता छे ०·०८३४६ चें लक्षण −२ आहे.

अर्थात् छे ०·०८३४६ = −२ + ·९२१५

साधारणपणे, छे ०·०८३४६ ची अर्हा २̄·९२१५ अशी लिहिली जाते.

१३.७ जर छे न = य असेल तर न ला य ची प्रतिच्छेदा म्हणतात, ही परिभाषा पूर्वीच दिली आहे.

अर्थात् न = प्रतिच्छे. य

प्रतिच्छेदांची सारणी प्रकरणाच्या शेवटीं दिली आहे. तिच्या साह्याने एखाद्या राशीची प्रतिच्छेदा निश्चित करण्याची रीति पुढे दिली आहे.

प्रतिच्छे (२·४७८९) ची अर्हा काढा.

प्रथमतः लक्षण विचारांत न घेतां केवळ दशमिकांशाचाच विचार करा. प्रतिच्छेदांच्या सारणींत अगदी डाव्या अंगास असलेल्या स्तंभांत ·४७ शोधून काढा. ·४७ च्या पंक्तींत पण शीर्षस्थानीं ८ असलेल्या स्तंभामध्ये ३००६ हा संख्येशीं थांबा. पुन्हा याच पंक्तीमध्ये पुढे जाऊन मध्यकांतरांच्या सारणींत शीर्षस्थानीं ९ असलेल्या स्तंभांत असणारा ६ हा अंक (वस्तुतः ·०००६) मिळेल. ही राशि ३००६ मध्ये मिळवा म्हणजे ३०१२ ही प्रतिच्छे (·४७८९) ची दशमिक चिह्न निरपेक्ष अर्हा आहे. किंवा ३०१२ हे प्रतिच्छे ·४७८९ च्या अर्हेचे सार्थक अंक आहेत. प्रतिच्छे २·४७८९

$छे_{क}ख$ ही स्थिर राशि आहे हिची अर्हा सारणीवरून काढतां येते. हिला मापांक म्हणतात.

$$छे_{ख}न = \frac{छे_{क}न}{छे_{क}ख}$$

या समीकारांत न ऐवजी क चा आदेश करून

$$छे_{ख}क = \frac{छे_{क}क}{छे_{क}ख}$$

अर्थात् $छे_{ख}क \times छे_{क}ख = १$

१३.९ छेदांचा उपयोग अंकगणिती गणन सुलभतेने करण्याकडे करतां येतो हें खालील उदाहरणांवरून स्पष्ट होईल.

उदाहरण १— ३८७ चें घनमूळ काढा.

समजा $य = \sqrt[3]{३८७}$, अर्थात् $य^{3} = ३८७$

दोन्ही पक्षांतील राशींच्या छेदा घेऊन

$छे\ य^{3} = छे ३८७$

किंवा $३\ छे\ य = छे\ ३८७$

छेदा सारणीचा उपयोग करून

$३ छे य = २·५८७७$

$छे\ य = ·८६२६$

$\therefore\ य = प्रतिच्छे\ ·८६२६$

प्रतिच्छेदासारणीचा उपयोग करून

$प्रतिच्छे\ ·८६२६ = ७·२८८$

$\therefore$ य $=$ ७·२८८

अर्थात् $\sqrt[3]{३८७} = ७·२८८$

उदाहरण २—

$\sqrt[७]{\left(\frac{८८७ \times ७३९}{२३५७ \times ११७}\right)^४}$ याची अर्हा ३ दशमिक स्थानापर्यंत अचूक काढा.

$$समजा = \sqrt[७]{\left(\frac{८८७ \times ७३९}{२३५७ \times ११७}\right)^४}$$

दोन्ही पक्षांच्या छेदांचें समीकरण मांडून

$$छेय = छे \left(\frac{८८७ \times ७३९}{२३५७ \times ११७}\right)^{\frac{४}{७}}$$

$$= \frac{४}{७}\left(छे८८७ + छे७३९ - छे२३५७ - छे११७\right)$$

सारणीचा उपयोग करून

$$= \frac{४}{७}\left[२·२४७९ + २·८६८६ - ३·३७२ - २·०६८२\right]$$

$$= \frac{४}{७}\left[·३७६३\right]$$

$$= ·२१५०$$

$$\therefore य = प्रतिच्छे\ ·२१५०$$

म्हणून सारणीवरून

$$य = १\cdot६४१$$

उदाहरण ३— छे२ = ·३०१० आणि छे ७ = ·८४५१ दिले असतांना छे ९८० ची अर्हा काढा.

$$छे\,९८० = छे[१० \times २ \times ७^{२}]$$

$$= छे१० + छे२ + छे७^{२}$$

$$= छे१० + छे२ + २छे७$$

$$= १ + \cdot३०१० + १\cdot६९०२$$

$$= २\cdot९९१२$$

उदाहरण ४— छे २ = ·३०१० आणि छे ३ = ·४७७१ असल्यास $६^{५७}$ मधे किती अंक आहेत तें काढा.

समजा $६^{५७}$ ची छेदा य आहे

म्हणून $य = छे\,६^{५७}$

$$= ५७\,छे\,२ \times ३$$

$$= ५७\,[छे२ + छे\,३]$$

$$= ५७\,[\cdot३०१० + \cdot४७७१]$$

$$= ५७\,[\cdot७७८१]$$

$$= ४४\cdot३५१७$$

म्हणून छे $६^{५७}$ चें लक्षण ४४ आहे.

यावरून $६^{५७}$ मध्ये ४५ अंक आहेत.

उदाहरण ५— सोडवा

$$६^{३-४य} \times ४^{य+५} = ८$$

[फलकत्ता १९३८

दोन्ही पक्षांच्या छेदांचा समीकार मांडून

$$\text{छे}\left[६^{३-४\text{य}} \times ४^{\text{य}+५}\right] = \text{छे } ८$$

किंवा $(३ - ४\text{य})\text{ छे } ६ + (\text{य} + ५)\text{ छे } ४ = \text{छे } ८$

म्हणून $\text{य}\left[\text{छे}४ - ४\text{छे}६\right] = \text{छे}८ - ५\text{छे}४ - ३\text{छे}६$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{छे}८ - ५\text{छे}४ - ३\text{छे}६}{\text{छे}४ - ४\text{छे}६}$$

$$= \frac{३\text{छे}२ - १०\text{छे}२ - ३\text{छे}२ - ३\text{छे}३}{२\text{छे}२ - ४\text{छे}२ - ४\text{छे}३}$$

$$= \frac{१०\text{छे}२ + ३\text{छे}३}{२\text{छे}२ + ४\text{छे}३}$$

$$= \frac{१०\text{छे}२ + ३\text{छे}३}{२\text{छे}२ + ४\text{छे}३}$$

छे२ आणि छे३ च्या अर्हा मांडून

$$\text{य} = \frac{१० \times ·३०१० + ३ \times ·४७७१}{२ \times ·३०१० + ४ \times ·४७७१}$$

$$= \frac{४·४४१३}{२·४१०४}$$

$= १·७$ (एक दशामिक स्थानापर्यंत अचूक)

उदाहरण ६—

$$७\text{ छे }\frac{१६}{१५} + ५\text{छे}\frac{२५}{२४} + ३\text{छे }\frac{८१}{८०} = \text{ छे२}$$ हे दाखवा.

[कलकत्ता १९३६

वाम पक्ष $=$ ७छे१६ $-$ ७छे१५ $+$ ५छे२५ $-$ ५छे२४ $+$ ३छे८१ $-$ ३छे८०

$=$ ७छे$२^४$ $-$ ७छे३ $-$ ७छे५ $+$ ५छे$५^२$ $-$ ५छे$२^३$ $-$ ५छे३ $+$ ३छे$३^४$ $-$ ३छे$२^४$ $-$ ३छे५

$=$ २८छे२ $-$ ७छे३ $-$ ७छे५ $+$ १०छे५ $-$ १५छे२ $-$ ५छे३ $+$ १२छे३ $-$ १२छे२ $-$ ३छे५

$=$ छे२

## प्रश्नसंग्रह १९

खालील राशींच्या छेदा काढा. (उदा. १ ते ४)

(१) २ आधारी २५६, १२८, ·५, ·२५, ०·०६२५

(२) ३ आधारी २१८७, २४३

(३) ५ आधारी ६२५, ३१२५, ·००१६

(४) (क) २$\sqrt{३}$ आधारी, १४४ ची

(ख) $\sqrt{७}$ आधारी, ३४३ ची

(ग) २$\sqrt{२}$ आधारी, ५१२ ची

(घ) $\sqrt{य}$ आधारी, $\sqrt{य^{\frac{२}{३}}}$ ची

(५) खालील छेदा छे क, छे [illegible] छे ग यांच्या पदांमध्ये व्यक्त करा.

[illegible] (क$^{\frac{१}{५}}$ख$^{४}$ग$^{-१}$)

(आ) छे $(क^{३} ख^{-१} ग^{१})^{\frac{१}{३}}$

(इ) छे $(\sqrt[५]{क^{-५} ख^{१५} ग^{३०}})$

(ई) छे $\left[\frac{\sqrt[१३]{क^{२६} ख^{१७} ग^{-३९}}}{(क^{३} ख^{-१} ग^{५})^{\frac{१}{३}}}\right]$

(६) ७छे $\frac{१०}{९}$ − २ छे $\frac{२५}{२४}$ + ३ छे $\frac{८१}{८०}$ = छे २ हें दाखवा.

[कलकत्ता १९३७

(७) छेवा१० = २२छेवा $\frac{१०}{९}$ − छेवा $\frac{२५}{२४}$ + १०छेवा $\frac{८१}{८०}$

हें दाखवा.

(८) खालील राशींच्या छेदांचीं लक्षणें काढा.

(क) १९४७ (ख) ३५९८७·१ (ग) ·२ (घ) ·००२

(ङ) ·००००००७

खालील समीकार सोडवा. (उदा. ९ ते १४)

(९) $क^{३-य} ख^{५य} = क^{य+५} ख^{३य}$ [कलकत्ता १९३७

(१०) $३^{य} = ५$

(११) $२^{य} \times ३^{य} = १००$ [कलकत्ता १९२५

(१२) $य^{र} = र^{य}$ आणि $य = २र$ [कलकत्ता १९३५

(१३) $३^{२य} \times ५^{३य-४} = ७^{य-१} \times ११^{२य}$ [मद्रास १९२८

(१४) छे$(य^{२}र^{३})$ = क आणि छे$\frac{य}{र}$ = ख [कलकत्ता १९१९

(१५) सिद्ध करा—

$$\text{य}^{(\text{छेर}-\text{छेल})} \times \text{र}^{(\text{छेल}-\text{छेय})} \times \text{ल}^{(\text{छेय}-\text{छेर})} = \text{१}$$

(१६) सिद्ध करा—

$$\text{छे}_{\text{ख}}\text{क} \times \text{छे}_{\text{ग}}\text{ख} \times \text{छे}_{\text{क}}\text{ग} = \text{१}$$

## प्रकरण चवदावें

## घातांक-श्रेढी आणि छेदा-श्रेढी

(exponential and logarithmic series)

१४.१ $क^{र}$ ह्या प्रतीकाचा (symbol) निश्चित अर्थ आपल्याला माहीत झाला आहे. आता $क^{र}$ चा, र च्या आरोही घातांमध्ये विस्तार करून त्यावरून, ज्यांचा उपयोग निरनिराळ्या संख्यांचें छेदागणन करण्याकडे होतो. अशा कांही महत्वाच्या श्रेढ्या काढूं.

१४.२ $क^{र}$ चा र च्या आरोही घातांत विस्तार करणें.

जर $\frac{१}{स}$ ही राशि संख्येने १ पेक्षा लहान असेल तर

द्विपद प्रमेयानुसार

$$\left(१+\frac{१}{स}\right)^{सय} = १+सय\times\frac{१}{स}+\frac{सय(सय-१)}{१\times२}\frac{१}{स^{२}}$$

$$+\frac{सय\,(सय-१)\,(सय-२)}{१\times२\times३}\times\frac{१}{स^{३}}+\ldots$$

$$= १ + य + \frac{य\left(य - \frac{१}{स}\right)}{१ \times २} + \frac{य\left(य - \frac{१}{स}\right)\left(य - \frac{२}{स}\right)}{१ \times २ \times ३}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

वरील फलांत जर य ऐवजी १ चा आदेश केला तर

$$\left(१ + \frac{१}{स}\right)^{स} = १ + १ + \frac{१(१ - \frac{१}{स})}{१ \times २} + \frac{१(१ - \frac{१}{स})(१ - \frac{२}{स})}{१ \times २ \times ३}$$

$$+ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

परंतु $\left(१ + \frac{१}{स}\right)^{सय} = \left[\left(१ + \frac{१}{स}\right)^{स}\right]^{य}$

म्हणून

$$१ + य + \frac{य\left(य - \frac{१}{स}\right)}{१ \times २} + \frac{य\left(य - \frac{१}{स}\right)\left(य - \frac{२}{स}\right)}{१ \times २ \times ३} + \ldots$$

$$= \left[१ + १ + \frac{१\left(१ - \frac{१}{स}\right)}{१ \times २} + \frac{१\left(१ - \frac{१}{स}\right)\left(१ - \frac{२}{स}\right)}{१ \times २ \times ३} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right]^{य}$$

म्हणून (१) ही श्रेढी, (२) ह्या श्रेढीचा य वा घात आहे.

स कितीहि मोठा असला तरी ही समता सदैव सत्य आहे.

आता स जसा जसा वाढतो तशा तशा $\frac{१}{स}, \frac{२}{स}, \ldots\ldots$ यांच्या अर्हा कमी कमी होतात. आणि शेवटीं जेव्हा $स \to \infty$ तेव्हा $\frac{१}{स}, \frac{२}{स} \ldots, \ldots$ सर्व शून्यप्रवृत्त होतात.

म्हणून 'सीमांतीं

$$१ + य + \frac{य^२}{\underline{|२}} + \frac{य^३}{\underline{|३}} + \ldots\ldots$$

$$= \left(१ + १ + \frac{१}{\underline{|२}} + \frac{१}{\underline{|३}} + \ldots\ldots \right)^{य} \ldots\ldots\ldots\ldots [आ]$$

$\left(१ + १ + \frac{१}{\underline{|२}} + \frac{१}{\underline{|३}} + \ldots\ldots \right)$ ह्या श्रेढीचा निर्देश सदैव 'घा' ने केला जातो.

या निर्देशाप्रमाणे (आ) हें फल

$$घा^{य} = १ + य + \frac{य^२}{\underline{|२}} + \frac{य^३}{\underline{|३}} + \ldots\ldots\ldots$$

असें लिहिलें जातें.

आता ह्या फलांत य ऐवजी गर चा आदेश केला तर

$$घा^{गर} = १ + गर + \frac{ग^२र^२}{\underline{|२}} + \frac{ग^३र^३}{\underline{|३}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

आता $घा^{ग}$ ऐवजी क चा आदेश करा.

अर्थात् $घा^{ग} = क$

म्हणून $ग = छेघाक$
आणि $घा^{गर} = क^{र}$

$$\therefore क^{र} = १ + र\, छेघाक + \frac{र^{२}}{|\underline{२}} (छेघाक)^{२} + \frac{र^{३}}{|\underline{३}} [छेघाक]^{३} + \ldots\ldots$$

या श्रेढीला घातांक श्रेढी म्हणतात.

उपसिद्धांत १— स ला सीमातीत असंख्य वाढविल्यास

$\left(१ + \frac{१}{स}\right)^{स}$ ची अर्हा घा असते.

$$\therefore \underset{स \to \infty}{सी} \left(१ + \frac{१}{स}\right)^{स} = घा$$

उपसिद्धांत २ — स ला सीमातीत असंख्य वाढविल्यास

$\left(१ + \frac{य}{स}\right)^{स}$ ची अर्हा $\left(१ + य + \frac{य^{२}}{|\underline{२}} + \frac{य^{३}}{|\underline{३}} + \ldots\ldots\right)$

या श्रेढीसमान होते.

आता द्विपद प्रमेयानुसार

$$\left[१ + \frac{य}{स}\right]^{स} = १ + स \times \frac{य}{स} + \frac{स(स-१)}{|\underline{२}} \frac{य^{२}}{स^{२}} + \frac{स(स-१)(स-२)}{|\underline{३}} \frac{य^{३}}{स^{३}} + \ldots\ldots$$

$$=१+य+\frac{१\left(१-\frac{१}{स}\right)}{\lfloor२}य^२+\frac{१\left(१-\frac{१}{स}\right)\left(१-\frac{२}{स}\right)}{\lfloor३}य^३$$

$$+\ldots\ldots$$

आता जेव्हा स सीमातीत असंख्य होतो

अर्थात् $स\rightarrow\infty$, तेव्हा $\frac{१}{स}$, $\frac{२}{स}$, $\frac{३}{स}$, ....... वगैरे राशी शून्यप्रवृत्त होतात.

म्हणून सीमांतीं

$$\underset{स\rightarrow\infty}{सी}\left(१+\frac{य}{स}\right)^{स}=१+य+\frac{य^२}{\lfloor२}+\frac{य^३}{\lfloor३}+\ldots\ldots$$

$$पण\ \ घा^{य}=१+य+\frac{य^२}{\lfloor२}+\frac{य^३}{\lfloor३}+\ldots\ldots$$

$$\therefore \underset{स\rightarrow\infty}{सी}\left(१+\frac{य}{स}\right)^{स}=घा^{य}$$

१४·३ वरील अनुच्छेदांत राशींचें श्रेढीरूप काढतांना केवळ स लाच असंख्य वाढविलें आहे. म्हणून $\frac{१}{स}$ ही राशि सदैव १ पेक्षा लहानच राहते. य आणि र च्या मह्रांवर कोणत्याहि प्रकारें प्रतिबंध घातलेला नाहीं.

आता जेव्हा ल संख्येने १ पेक्षा लहान असतो अर्थात् जेव्हा $-१<ल<१$ असतो तेव्हाच त च्या सर्व मह्रांकरिता

$$=\frac{(-१)^{न}(छेघांक)^{न-२}}{\lfloor न-२} \left[\frac{(छेघांक)^{२}}{न(न-१)}+२\frac{छेघांक}{न-१}+३\right]$$

उदाहरण २— खालील श्रेढीचा योग काढा.

$$१+\frac{२^{२}}{\lfloor २}+\frac{३^{२}}{\lfloor ३}+\frac{४^{२}}{\lfloor ४}+\dots\dots\dots \infty$$

आता स वें पद $प_{स}=\frac{स^{२}}{\lfloor स}$

$$=\frac{स}{\lfloor स-१}$$

$$=\frac{स-१+१}{\lfloor स-१}$$

$$=\frac{१}{\lfloor स-२}+\frac{१}{\lfloor स-१}$$

आता 'स' ला २, ३, ४ इत्यादि अर्हा देऊन

$$प_{२} = \frac{१}{\lfloor ०}+\frac{१}{\lfloor १}=\frac{१}{१}+\frac{}{\lfloor १}$$

$$प_{३} = \frac{१}{\lfloor १}+\frac{१}{\lfloor २}$$

$$प_{४} = \frac{१}{\lfloor २}+\frac{१}{\lfloor ३}$$

...............................

$$\therefore प_2 + प_3 + प_4 + \dots = \left[\frac{१}{|\underline{०}} + \frac{१}{|\underline{१}} + \frac{१}{|\underline{२}} + \frac{१}{|\underline{३}} + \dots\dots\right]$$

$$+ \left[\frac{१}{|\underline{१}} + \frac{१}{|\underline{२}} + \frac{१}{|\underline{३}} + \dots\right]$$

पण $घा = १ + १ + \frac{१}{|\underline{२}} + \frac{१}{|\underline{३}} + \dots\dots\dots$

$\therefore\ प_2 + प_3 + प_4 + \dots\dots\dots = घा + घा - १ = २घा - १$

दोन्ही पक्षांत $प_1$ मिळवा. पण दिलेल्या श्रेढीवरून $प_1 = १$ आहे.

$\therefore प_1 + प_2 + प_3 + प_4 + \dots\dots = १ + घा + घा - १$

$= २घा$

म्हणून दिलेल्या अनंत श्रेढीचा योग = २ घा.

टीप— $प_स = \frac{१}{|\underline{स - २}} + \frac{१}{|\underline{स - १}}$ यामध्ये स = १ ठेवल्यास उजव्या बाजूंत पहिल पद $\frac{१}{|\underline{-१}}$ येतें. परंतु $|\underline{-१}$ ला अर्थ नसल्यामुळे स = १ ठेवून पहिलें पद काढतां येत नाही. म्हणून दिलेल्या श्रेढीवरूनच पहिल्या पदाची अर्हा घ्यावी लागते.

१४.५ छे$_{घा}$(१ + य) चा य च्या आरोही घातांत विस्तार करणें.

घातांक-प्रमेयावरून

$$क^र = १ + र \text{ छेघाक} + \frac{र^२ (\text{छेघाक})^२}{\underline{|२}} + \frac{र^३ (\text{छेघाक})^३}{\underline{|३}} + \ldots\ldots\ldots$$

त्यांत क = (१ + य) चा आदेश करून

$$(१ + य)^र = १ + र[\text{छेघा}(१ + य)] + \frac{र^२ [\text{छेघा}(१ + य)]^२}{\underline{|२}} + \frac{र^३ [\text{छेघा}(१ + य)]^३}{\underline{|३}} + \ldots\ldots\ldots \quad (१)$$

हा संबंध प्रस्थापित होतो.

आता य ची अर्हा संख्येने १ पेक्षा लहान असतांना अर्थात् $-१ < य < १$ असतांना, आणि र च्या सर्व अर्हांकरिता द्विपद प्रयेमावरून $(१ + य)^र$ चा विस्तार काढतां येतो.

म्हणून $-१ < य < १$ असतांना

$$(१ + य)^र = १ + रय + \frac{र(र-१)}{\underline{|२}} य^२ + \frac{र(र-१)(र-२)}{\underline{|३}} य^३ + \ldots\ldots\ldots \quad (२)$$

(१) आणि (२) या संबंधांत वाम पक्ष सर्वांगसम आहेत. म्हणून उजवे पक्षहि सर्वांगसम आहेत.

$$\therefore \; १ + \text{रय} + \frac{\text{र}(\text{र}-१)\text{य}^{२}}{\underline{|२}} + \frac{\text{र}(\text{र}-१)(\text{र}-२)\text{य}^{३}}{\underline{|३}} + \ldots$$

$$= १ + \text{र} \; \text{छेधा}\,(१+\text{य}) + \frac{\text{र}^{२}[\text{छेधा}\,(१+\text{य})]^{२}}{\underline{|२}}$$

$$+ \frac{\text{र}^{३}[\text{छेधा}\,(१+\text{य})]^{३}}{\underline{|३}} + \ldots\ldots(३)$$

(३) हा संबंध ऐकात्म्य आहे.

म्हणून दोन्ही पक्षांत 'र' चे आणि 'र' च्या घातांचे गुणक समान आहेत.

वाम पक्षांतील 'र' चा गुणक = छेधा

दक्षिण पक्षांतील 'र' चा गुणक

$$= \text{य} + \frac{(-१)\text{य}^{२}}{\underline{|२}} + \frac{(-१)(-२)\text{य}^{३}}{\underline{|३}}$$

$$+ \frac{(-१)(-२)(-३)\text{य}^{४}}{\underline{|४}} + \ldots\ldots\ldots$$

गुणकांना समीकृत करून

$$\text{छेधा}\,(१+\text{य}) = \text{य} - \frac{\text{य}^{२}}{२} + \frac{\text{य}^{३}}{३} - \frac{\text{य}^{४}}{४} + \ldots\ldots\ldots;$$

$$-१ < \text{य} < १$$

या श्रेढीला छेदा-श्रेढी म्हणतात.

१४.५१ $\text{छेधा}(१+\text{य}) = \text{य} - \frac{\text{य}^{२}}{२} + \frac{\text{य}^{३}}{३} - \frac{\text{य}^{४}}{४} + \ldots\ldots$

या विस्तारांत य ऐवजी (– य) लिहून

$$छे_{णा}(१-य) = -य - \frac{य^२}{२} - \frac{य^३}{३} - \frac{य^४}{४} \ldots\ldots\ldots$$

$[-१ < -य < १]$

१४.६ कोणत्याहि राशीची छेदा काढणें— १४.५ आणि १४.५१ या अनुच्छेदांवरून $-१ < य < १$ असल्यास

$$छे(१+य) = य - \frac{य^२}{२} + \frac{य^३}{३} - \frac{य^४}{४} + \ldots\ldots\ldots (१)$$

$$आणि\ छे(१-य) = -य - \frac{य^२}{२} - \frac{य^३}{३} - \frac{य^४}{४} - \ldots\ldots (२)$$

(१) मधून (२) उणें करून

$$छे\left(\frac{१+य}{१-य}\right) = २\left[य + \frac{य^३}{३} + \frac{य^५}{५} + \ldots\right] \ldots\ldots\ldots (३)$$

आता $\dfrac{१+य}{१-य} = \dfrac{ठ}{ट}$

अर्थात् $य = \dfrac{ठ-ट}{ठ+ट}$. आता य ऐवजी $\dfrac{ठ-ट}{ठ+ट}$ चा आदेश करून (३) श्रेढीचें खालील श्रेढींत रूपांतर होतें.

$$छे\frac{ठ}{ट} = २\left[\frac{ठ-ट}{ठ+ट} + \frac{१}{३}\left(\frac{ठ-ट}{ठ+ट}\right)^३ + \frac{१}{५}\left(\frac{ठ-ट}{ठ+ट}\right)^५ + \ldots\ldots\right]$$

आता ट ऐवजी (ट+१) चा आदेश करून

$$छे \frac{ट+१}{ट} = २\left[\frac{१}{२ट+१} + \frac{१}{३}\left(\frac{१}{२ट+१}\right)^{३} + \frac{१}{५}\left(\frac{१}{२ट+१}\right)^{५} + \ldots\ldots\right]$$

ट=१, २, ३, घेतल्यास

$$छे\, २ = २\left[\frac{१}{३} + \frac{१}{३}\times\frac{१}{३^{३}} + \frac{१}{५\times ३^{५}} + \ldots\ldots\right] \quad \ldots(४)$$

$$छे \frac{३}{२} = २\left[\frac{१}{५} + \frac{१}{३}\times\frac{१}{५^{३}} + \frac{१}{५\times ५^{५}} + \ldots\right] \ldots (५)$$

..........................................................................

(४) ह्या फलाच्या उजव्या पक्षांतील श्रेढीचा योग ·६९३१४७ येतो.

म्हणून छे २ = ·६९३१४७

(५) मध्ये $छे \frac{३}{२} = छे३ - छे२$

आता छे २ ची अहा काढलो आहे.

(५) च्या उजव्या पक्षांताल श्रेढीचा योग काढून

छे ३ − छे२ = ·४०५४६५

∴ छे ३ = ·४०५४६५ + ·६९३१४७

= १·०९८६१२

अशा प्रकारे कोणत्याहि राशीची घा-आधारी छेदा अपेक्षित परिशुद्धतेच्या अंशापर्यंत काढतां येते.

१४.७ उदाहरण १—

छे $(१-५य+६य^२)$ चा 'य' च्या आरोही घातांत विस्तार करा, आणि सामान्यपद काढा.

$$१-५य+६य^२=(१-३य)(१-२य)$$

$$\therefore छे(१-५य+६य^२)=छे(१-३य)+छे(१-२य)$$

$$आता\ छे(१-३य)=-\left[३य+\frac{(३य)^२}{२}+\frac{(३य)^३}{३}+\ldots\ldots\right]$$

$$आणि\ छे(१-२य)=-\left[२य+\frac{(२य)^२}{२}+\frac{(२य)^३}{३}+\ldots\ldots\right]$$

$$\therefore छे(१-५य+६य^२)=-\left[३य+\frac{(३य)^२}{२}+\frac{(३य)^३}{३}+\ldots\right]$$

$$-\left[२य+\frac{(२य)^२}{२}+\frac{(२य)^३}{३}+\ldots\ldots\right]$$

$$आता\ सामान्य\ पद\ प_न=-\frac{(३य)^न}{न}-\frac{(२य)^न}{न}$$

$$=-\frac{य^न}{न}(३^न+२^न)$$

आता, न ला १, २, ३,........या अर्हा देऊन १ लें, २ रें, ३ रें, ..........पदें प्राप्त होतात आणि

$$म्हणून\ छे(१-५य+६य^२)=-\frac{य}{१}(५)-\frac{य^२}{२}(१३)$$

$$-\frac{य^३}{३}(३५)\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

उदाहरण २— छे $(१-य+य^२)$ चा य च्या आरोही घातांत विस्तार करा.

$$\text{आता } १-य+य^२=\frac{(१-य+य^२)\ (१+य)}{१+य}$$

$$=\frac{१+य^३}{१+य}$$

$$\text{म्हणून छे}(१-य+य^२)=\text{छे } \frac{१+य^३}{१+य}$$

$$=\text{छे}(१+य^३)-\text{छे}(१+य)$$

$$=\left[य^३-\frac{य^६}{२}+\frac{य^९}{३}-\frac{य^{१२}}{४}+\ldots\right]$$

$$-\left[य-\frac{य^२}{२}+\frac{य^३}{३}-\frac{य^४}{४}+\ldots\right]$$

$$=-य+\frac{य^२}{२}+२\frac{य^३}{३}+\frac{य^४}{४}-\frac{य^५}{५}\ldots$$

उदाहरण ३— $य^२-तय+थ=०$ या समीकाराच्या मूळांचा अ आणि आ यांनी निर्देश केल्यास

$$\text{छे }(१+तय+थय^२)=\frac{(अ+आ)}{१}य-\frac{अ^२+आ^२}{२}य^२$$

$$+\frac{अ^३+आ^३}{३}य^३-\ldots\ldots$$

हें दाखवा.

$य^२-तय+थ=०$ ची अ आणि आ हीं मूळें

असल्यामुळे

$$अ+आ=त$$
$$अ\,आ=थ$$

आता $(१+तय+थय^२)=१+(अ+आ)\,य+अआय^२$
$$=(१+अय)\;(१+आय)$$

म्हणून छे $(१+तय+थय^२)$

$$=छे\left[(१+अय)\;(१+आय)\right]$$
$$=छे\,(१+अय)+छे\,(१+आय)$$
$$=\left[अय-\frac{अ^२य^२}{२}+\frac{अ^३य^३}{३}-\frac{अ^४य^४}{४}+\ldots\ldots\right]$$
$$+\left[आय-\frac{आ^२य^२}{२}+\frac{आ^३य^३}{३}-\ldots\ldots\right]$$
$$=(अ+आ)\,य-\frac{अ^२+आ^२}{२}य^२$$
$$+\frac{अ^३+आ^३}{३}य^३-\ldots\ldots$$

१४.८ घा ही राशि असंमेय (incommensurable) आहे हें सिद्ध करणें.

या अनुच्छेदांत घा ही राशि पूर्णांक किंवा भिन्न नाही हें आपण सिद्ध करूं.

$$आता\;घा=१+१+\frac{१}{\underline{|२}}+\frac{१}{\underline{|३}}+\ldots\ldots\infty\ldots\quad(अ)$$

(१) वरील श्रेढीवरून, घा > २ हें उघड आहे.

$$१+१+\frac{१}{२}+\frac{१}{२^२}+\frac{१}{२^३}+\dots\dots\infty \quad (आ)$$

या श्रेढींतील पहिलीं ३ पदें क्रमशः घा च्या विस्तारांतील पहिल्या ३ पदांच्या समान असून चवथ्या पदापासून (आ) तील प्रत्येक पद (अ) च्या संवादी पदापेक्षा मोठें आहे.

$$\therefore १+१+\frac{१}{\underline{|२}}+\frac{१}{\underline{|३}}+\frac{१}{\underline{|४}}+\dots\dots\infty$$

$$<१+१+\frac{१}{२}+\frac{१}{२^२}+\dots\dots\infty$$

अर्थात् $घा <१+१+\frac{१}{२}+\frac{१}{२^२}+\dots\dots\infty$

किंवा $घा<१+\frac{१}{१-\frac{१}{२}}$

$<१+२$

$\therefore घा <३$

यावरून $२ < घा <३$

यावरून घा हा पूर्णांक नसून त्याची अही २ आणि ३ मध्ये आहे हें स्पष्ट आहे.

(२) आता, शक्य असल्यास, घा हा घन भिन्न आहे असें समजा. ट आणि ठ हा घन पूर्णांक राशी असल्यास घा,

$\frac{\text{ठ}}{\text{ट}}$ या रूपांत लिहितां येतो.

$$\therefore \frac{\text{ठ}}{\text{ट}} = १ + १ + \frac{१}{\underline{|२}} + \ldots \frac{१}{\underline{|\text{ट}}} + \frac{१}{\underline{|\text{ट}+१}} + \frac{१}{\underline{|\text{ट}+२}} + \ldots$$

दोन्ही पक्षांस $\underline{|\text{ट}}$ ने गुणा म्हणजे

$$\text{ठ}\ \underline{|\text{ट}-१} = \underline{|\text{ट}} + \underline{|\text{ट}} + \frac{\underline{|\text{ट}}}{\underline{|२}} + \ldots\ldots + १ + \frac{१}{\text{ट}+१}$$

$$+ \frac{१}{(\text{ट}+१)(\text{ट}+२)} + \ldots\ldots$$

$\underline{|\text{ट}}$ हा पहिल्या ट प्राकृतिक संख्याचा गुणाकार आहे. म्हणून ठ $\underline{|\text{ट}-१}$, $\underline{|\text{ट}}$, $\underline{|\text{ट}-१}$,...... आणि १ या सर्व राशी घन पूर्णांक आहेत.

$$\therefore \text{ठ}\ \underline{|\text{ट}-१} = \text{पूर्णांक} + \frac{१}{(\text{ट}+१)}$$

$$+ \frac{१}{(\text{ट}+१)(\text{ट}+२)} + \ldots$$

आता $\frac{१}{\text{ट}+१} + \frac{१}{(\text{ट}+१)(\text{ट}+२)} + \ldots$

हा लघ्वंश भिन्न आहे. म्हणून हा पहिल्या पदाहून मोठा आहे आणि $\frac{१}{\text{ट}+१} + \frac{१}{(\text{ट}+१)^२} + \frac{१}{(\text{ट}+१)^३} + \ldots\infty$ या गुणोत्तर

श्रेढीच्या योगापेक्षा अर्थात् $\frac{१}{ट}$ पेक्षा लहान आहे. पण वामपक्ष पूर्णांक आहे.

यावरून पूर्णांक = पूर्णांक + लघ्वंश भिन्न

पण हें विसंगत आहे.

म्हणून घा हा एक भिन्न आहे ही आपली मानना चूक आहे.

म्हणून घा ही पूर्णांक किंवा भिन्न राशि नाही.

आतां केवळ पूर्णांक किंवा भिन्न राशीच संमेय असतात.

म्हणून घा ही असंमेय राशि आहे.

## प्रश्नसंग्रह २०

(१) $\frac{१}{य}[१ - घा^{-य}]$ चा य च्या आरोही घातांत $य^{४}$ पर्यंत विस्तार करा. [बनारस १९३०

(२) $घा^{घा^{य}}$ चा य च्या आरोही घातांत $य^{४}$ पर्यंत विस्तार करा.

(३) $\frac{१}{२श}[घा^{शय} - घा^{-शय}]$ चा य च्या आरोही घातांत विस्तार करा. $[श = \sqrt{-१}]$

(४) $$\frac{क + खय}{\underline{|१}} + \frac{(क + खय)^{२}}{\underline{|२}} + \frac{(क + खय)^{३}}{\underline{|३}} + \ldots$$

(आ) $\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$ या निश्चायकाचे

विस्तार $क_1(ख_2 ग_3 - ख_3 ग_2) - ख_1(क_2 ग_3 - क_3 ग_2)$
$+ ग_1(क_2 ख_3 - क_3 ख_2)$

किंवा $क_1(ख_2 ग_3 - ख_3 ग_2) - क_2(ख_1 ग_3 - ख_3 ग_1)$
$+ क_3(ख_1 ग_2 - ख_2 ग_1)$ हे आहेत.

हीं फलें अन्य रूपांत पुढीलप्रमाणे लिहितां येतात.

$$क_1 \begin{vmatrix} ख_2 & ग_2 \\ ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} - ख_1 \begin{vmatrix} क_2 & ग_2 \\ क_3 & ग_3 \end{vmatrix} + ग_1 \begin{vmatrix} क_2 & ख_2 \\ क_3 & ख_3 \end{vmatrix}$$

किंवा

$$क_1 \begin{vmatrix} ख_2 & ग_2 \\ ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} - क_2 \begin{vmatrix} ख_1 & ग_1 \\ ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} + क_3 \begin{vmatrix} ख_1 & ग_1 \\ ख_2 & ग_2 \end{vmatrix}$$

पहिल्या प्रकारांत निश्चायकांच्या प्रथम पंक्तीतील संघटकांच्या पदांत त्याचा विस्तार केला आहे. आणि दुसऱ्या प्रकारांत प्रथम स्तंभांतील संघटकांच्या पदांत त्याच निश्चायकाचा विस्तार केला आहे.

आता निश्चायकाचा विस्तार पहिल्या प्रकाराने कसा करतात तें पाहूं. हीच रीति दुसऱ्या प्रकारांत उपयोगांत आणली जाते.

ज्या स्तंभांत आणि पंक्तींत $क_1$ आहे त्या स्तंभाचें आणि पंक्तीचें अपमार्जन करून (delete) उरलेला निश्चायक हाच

$क_1$ चा चिह्ननिरपेक्ष गुणक आहे. ह्यावरून $\begin{vmatrix} ख_2 & ग_2 \\ ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$ ह्रा $क_1$ चा गुणक आहे.

ज्या स्तंभांत आणि पंक्तींत $ख_1$ आहे त्या स्तंभाचें आणि त्या पंक्तीचें अपमार्जन करून उरलेला निश्चायक ह्राच $ख_1$ चा चिह्ननिरपेक्ष गुणक आहे.

ह्यावरून, $ख_1$ चा चिह्ननिरपेक्ष गुणक

$$\begin{vmatrix} क_2 & ग_2 \\ क_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$

ज्या स्तंभांत आणि पंक्तींत $ग_1$ आहे त्या स्तंभाचें आणि पंक्तीचें अपमार्जन करून उरलेला निश्चायक $ग_1$ चा चिह्ननिरपेक्ष गुणक आहे.

ह्यावरून, $ग_1$ चा गुणक $= \begin{vmatrix} क_2 & ख_2 \\ क_3 & ख_3 \end{vmatrix}$

आता, एखाद्या निश्चायकाच्या विस्तारांत त्यांतील विशिष्ट पदाचें चिह्न निश्चित करण्यासाठी खालील नियमाचा उपयोग करतात.

निश्चायकाच्या विस्तारांत एखाद्या विशिष्ट संघटकाचें चिह्न ठरवावयाचें असल्यास अग्रसंघटकापासून, स्तंभावरून किंवा पंक्तीवरून किंवा दोहोंवरून त्याचें स्थान मोजा. या स्थानाची संख्या सम किंवा विषम असेल तदनुसार त्याचें 'चिह्न ऋण किंवा घन असतें.

अशा प्रकारच्या योग्य चिन्हांनी घेतलेल्या पदांचा बीजीय योग म्हणजेच निश्चायकाचा विस्तार होय.

उदाहरण— विस्तार करा.

$$\begin{vmatrix} ७ & २ & २० \\ १ & ४ & ७ \\ ३ & १ & ७ \end{vmatrix}$$

पहिल्या स्तंभांतील संघटकांच्या पदांत दिलेल्या निश्चायकाचा विस्तार केल्यास

$$\begin{vmatrix} ७ & २ & २० \\ १ & ४ & ७ \\ ३ & १ & ७ \end{vmatrix} = ७\begin{vmatrix} ४ & ७ \\ १ & ७ \end{vmatrix} - १\begin{vmatrix} २ & २० \\ १ & ७ \end{vmatrix} + ३\begin{vmatrix} २ & २० \\ ४ & ७ \end{vmatrix}$$

$$= ७(२८ - ७) - (१४ - २०) + ३ (१४ - ८०)$$

$$= १४७ + ६ + ४२ - २४०$$

$$= - ४५$$

## १५.३ निश्चायकांचे गुणधर्म.

कोणत्याहि वर्णाच्या निश्चायकास लागू पडणारे सर्वसाधारण गुणधर्म खाली त्रिवर्ण निश्चायक उदाहरण घेउन सिद्ध केलें आहे.

$$\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$ हें त्रिवर्ण निश्चायकाचें प्रमाप रूप आहे.

(१) स्तंभांचे पंक्तींत आणि पंक्तींचे स्तंभांत व्यतिहरण केल्यास निश्चायकाच्या अर्हेत परिवर्तन होत नाही.

अर्थात् $$\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} क_1 & क_2 & क_3 \\ ख_1 & ख_2 & ख_3 \\ ग_1 & ग_2 & ग_3 \end{vmatrix}$$

उदाहरण— विस्तार करा.

$$\begin{vmatrix} ७ & २ & २० \\ १ & ४ & ७ \\ ३ & १ & ७ \end{vmatrix}$$

पहिल्या स्तंभांतील संघटकांच्या पदांत दिलेल्या निश्चायकाचा विस्तार केल्यास

$$\begin{vmatrix} ७ & २ & २० \\ १ & ४ & ७ \\ ३ & १ & ७ \end{vmatrix} = ७\begin{vmatrix} ४ & ७ \\ १ & ७ \end{vmatrix} - १\begin{vmatrix} २ & २० \\ १ & ७ \end{vmatrix} + ३\begin{vmatrix} २ & २० \\ ४ & ७ \end{vmatrix}$$

$$= ७(२८ - ७) - (१४ - २०) + ३(१४ - ८०)$$

$$= १४७ + ६ + ४२ - २४०$$

$$= -४५$$

### १५.२ निश्चायकाचे गुणधर्म.

कोणत्याहि वर्णाच्या निश्चायकास लागू पडणारे सर्वसाधारण गुणधर्म खाली त्रिवर्ण निश्चायक उदाहरण घेउन सिद्ध केले आहे.

$$\begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$ हे त्रिवर्ण निश्चायकाचे प्रमाप रूप आहे.

(१) स्तंभांचे पंक्तींत आणि पंक्तींचे स्तंभांत व्यतिहरण केल्यास निश्चायकाच्या अर्हेत परिवर्तन होत नाही.

अर्थात् $$\begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{क}_2 & \text{क}_3 \\ \text{ख}_1 & \text{ख}_2 & \text{ख}_3 \\ \text{ग}_1 & \text{ग}_2 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$

दक्षिण पक्षाच्या निश्चायकांचा पहिल्या पंक्तीतील संघटकांच्या पदांत विस्तार केल्यास

दक्षिण पक्ष =

$$क_1(ख_2ग_3 - ग_2ख_3) - क_2(ख_1ग_3 - ग_1ख_3) + क_3(ख_1ग_2 - ग_1ख_2)$$

पदांची पुनर्रचना करून

दक्षिण पक्ष =

$$क_1(ख_2ग_3 - ख_3ग_2) - ख_1(क_2ग_3 - क_3ग_2) + ग_1(क_2ख_3 - क_3ख_2)$$

$$= क_1\begin{vmatrix} ख_2 & ग_2 \\ ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} - ख_1\begin{vmatrix} क_2 & ग_2 \\ क_3 & ग_3 \end{vmatrix} + ग_1\begin{vmatrix} क_2 & ख_2 \\ क_3 & ख_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$

यावरून निश्चायकांतील स्तंभ आणि पंक्ती यांचें व्यतिहरण करूनहि निश्चायकाची अर्हा अपरिवर्तित राहते हें दिसून येतें.

(२) कोणत्याहि निश्चायकांत, कोणत्याहि दोन अनुगामी पंक्तींचें किंवा स्तंभांचें व्यतिहरण केलें तर त्या निश्चायकाचें चिह्न बदलतें.

$\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$ ह्या निश्चायकांत $क_1$, $क_2$, $क_3$ आणि $ख_1$, $ख_2$, $ख_3$ ह्या स्तंभांचें व्यतिहरण करून आणि येणाऱ्या निश्चायकाचें चिन्ह बदलून

$$\begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{क}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_2 & \text{क}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{ख}_3 & \text{क}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$

हें सिद्ध करावयाचें आहे.

आता, दोन्ही निश्चायकांचा पहिल्या पंक्तींतील संघटकांच्या पदांत विस्तार करा.

$$\text{आता वाम पक्ष} = \text{क}_1(\text{ख}_2\text{ग}_3 - \text{ख}_3\text{ग}_2) - \text{ख}_1(\text{क}_2\text{ग}_3 - \text{क}_2\text{ग}_3) + \text{ग}_1(\text{क}_2\text{ख}_3 - \text{क}_3\text{ख}_2)$$

आणि दक्षिण पक्ष =

$$-[\text{ख}_1(\text{क}_2\text{ग}_3 - \text{क}_2\text{ग}_3) - \text{क}_1(\text{ख}_2\text{ग}_3 - \text{ख}_2\text{ग}_3) + \text{ग}_1(\text{ख}_2\text{क}_3 - \text{ख}_3\text{क}_2)]$$

$$= -\text{ख}_1(\text{क}_2\text{ग}_3 - \text{क}_3\text{ग}_2) + \text{क}_1(\text{ख}_2\text{ग}_3 - \text{ख}_3\text{ग}_2) - \text{ग}_1(\text{ख}_2\text{क}_3 - \text{ख}_3\text{क}_2)$$

$$= \text{क}_1(\text{ख}_2\text{ग}_3 - \text{ख}_3\text{ग}_2) - \text{ख}_1(\text{क}_2\text{ग}_3 - \text{क}_3\text{ग}_2) + \text{ग}_1(\text{ख}_3\text{क}_2 - \text{क}_3\text{ख}_2)$$

वाम पक्ष आणि दक्षिण पक्ष समान असल्यामुळे इष्ट प्रमेय सिद्ध होतें.

(३) एखाद्या निश्चायकात दोन स्तंभ, किंवा दोन पंक्ती सर्वांगसम असल्यास निश्चायकाची अर्हा शून्य असते.

$$\begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{क}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{क}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{क}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$ ह्या निश्चायकांत पहिले दोन स्तंभ

सर्वांगसम आहेत.

आता दुसऱ्या गुणधर्मावरून $\begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{क}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{क}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{क}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$ ह्या निश्चायकांतील पहिल्या दोन स्तंभांचें व्यतिहरण केल्यास त्याचें चिन्ह बदलतें. परंतु पहिले दोन स्तंभ सर्वांगसम असल्यामुळें निश्चायकाचें रूप तेंच राहतें.

$$\text{म्हणून} \quad \begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{क}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{क}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{क}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{क}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{क}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{क}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{अर्थात्} \quad 2 \begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{क}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{क}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{क}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{म्हणून} \quad \begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{क}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{क}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{क}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} = 0$$

(४) एखाद्या निश्चायकाच्या कोणत्याहि स्तंभांतील किंवा कोणत्याहि पंक्तींतील संघटकांना प नें गुणून येणारा निश्चायक, दिलेल्या निश्चायकाच्या प–पट असतो.

$\begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$ या निश्चायकाच्या पहिल्या स्तंभांतील संघटकांना प नें गुणून येणारा निश्चायक

$$= \begin{vmatrix} \text{पक}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{पक}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{पक}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$

ह्या निश्चायकाचा, पहिल्या स्तंभांतील संघटकांच्या पदांत विस्तार केल्यास

$$\begin{vmatrix} पक_1 & ख_1 & ग_1 \\ पक_2 & ख_2 & ग_2 \\ पक_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$

$$= पक_1 \begin{vmatrix} ख_2 & ग_2 \\ ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} - पक_2 \begin{vmatrix} ख_1 & ग_1 \\ ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} + पक_3 \begin{vmatrix} ख_1 & ग_1 \\ ख_2 & ग_2 \end{vmatrix}$$

$$= प\left[क_1 \begin{vmatrix} ख_2 & ग_2 \\ ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} - क_2 \begin{vmatrix} ख_1 & ग_1 \\ ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} + क_3 \begin{vmatrix} ख_1 & ग_1 \\ ख_2 & ग_2 \end{vmatrix}\right]$$

$$= प \begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$

उपसिद्धांत १—

निश्चायकांतील एखाद्या पंक्तींतील किंवा स्तंभांतील संघटक क्रमशः दुसऱ्याच एखाद्या पंक्तींतील किंवा स्तंभांतील संघटकांच्या प–पटी समान असल्यास त्याची अर्हा शून्य असते. अगोदर चवथ्या आणि नंतर तिसऱ्या गुणधर्माचा उपयोग करून वरील विधान सहज सिद्ध करतां येतें.

उपसिद्धांत २—

निश्चायकांतील एखाद्या पंक्तींतील किंवा स्तंभांतील सर्व संघटकांचें चिन्ह बदललें तर त्या निश्चायकाचेंहि चिन्ह बदलतें.

चिन्ह बदलून येणाऱ्या निश्चायकांतून −१ हा साधारण अवयव बाहेर काढून त्याची अर्हा −१ × दिलेला निश्चायक

अशी लिहितां येते. अर्थात् दिलेल्या निश्चायकाचें चिन्ह बदलतें.

(५) एखाद्या निश्चायकाच्या एखाद्या पंक्तींतील किंवा स्तंभांतील सर्व संघटक दोन किंवा अधिक राशींचे योग असल्यास, तो निश्चायक दोन किंवा अधिक निश्चायकांच्या योगांच्या रूपांत व्यक्त करतां येतो.

$\begin{vmatrix} \text{क}_1+\text{अ}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2+\text{अ}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3+\text{अ}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$ ह्या निश्चायकाच्या पहिल्या स्तंभांतील प्रत्येक संघटक दोन राशींचा योग आहे.

आता पहिल्या स्तंभाच्या संघटकांच्या पदांत दिलेल्या निश्चायकाचा विस्तार करा. म्हणजे निश्चायक

$$= (\text{क}_1+\text{अ}_1)\begin{vmatrix} \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} - (\text{क}_2+\text{अ}_2)\begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} + (\text{क}_3+\text{अ}_3)\begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \end{vmatrix}$$

$$= \text{क}_1\begin{vmatrix} \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} + \text{अ}_1\begin{vmatrix} \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} - \text{क}_2\begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$

$$- \text{अ}_2\begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} + \text{क}_3\begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \end{vmatrix} + \text{अ}_3\begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$

(६) एखाद्या निश्चायकाच्या कोणत्याहि एका पंक्तीतील किंवा स्तंभांतील संघटक हे इतर प्रत्येक पंक्तीतील किंवा स्तंभांतील संवादी संघटकांना अचल गुणकांनी (निरनिराळ्या पंक्तींना, किंवा स्तंभांना निरनिराळ्या अचलांनी) गुणून येणाऱ्या राशींच्या बीजीय योगासमान असतील तर तो निश्चायक शून्यासमान असतो.

$$\begin{vmatrix} ट ख_1 + ठ ग_1 & ख_1 & ग_1 \\ ट ख_2 + ठ ग_2 & ख_2 & ग_2 \\ ट ख_3 + ठ ग_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$ या निश्चायकाचा पहिला स्तंभ, दिलेल्या प्रतिबंधानुसार निर्माण झाला आहे.

दिलेला निश्चायक

$$= \begin{vmatrix} ट ख_1 & ख_1 & ग_1 \\ ट ख_2 & ख_2 & ग_2 \\ ट ख_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ठ ग_1 & ख_1 & ग_1 \\ ठ ग_2 & ख_2 & ग_2 \\ ठ ग_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(५ वरून)}$$

$$= ट \begin{vmatrix} ख_1 & ख_1 & ग_1 \\ ख_2 & ख_2 & ग_2 \\ ख_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} + ठ \begin{vmatrix} ग_1 & ख_1 & ग_1 \\ ग_2 & ख_2 & ग_2 \\ ग_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(४ वरून)}$$

$$= 0 \qquad \text{(२ वरून)}$$

(७) कोणत्याहि निश्चायकाच्या कोणत्याहि एखाद्या पंक्तीतील किंवा स्तंभांतील प्रत्येक संघटकांत इतर पंक्तीतील किंवा स्तंभांतील संघटकांना अचल गुणकांनी गुणून ते मिळविले तर तो निश्चायक अपरिवर्तित राहतो.

$$\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$ ह्या निश्चायकाच्या दुसऱ्या आणि

तिसऱ्या स्तंभांतील संघटकांना क्रमशः ट आणि ठ यांनी गुणून येणाऱ्या राशी पहिल्या स्तंभांतील संघटकांत क्रमशः मिळवा म्हणजे आपल्याला

$$\begin{vmatrix} क_1+टख_1+ठग_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2+टख_2+ठग_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3+टख_3+ठग_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$ ह्या निश्चायक

मिळतो. ह्या निश्चायकाचें नि ने अभिधान केल्यास

$$नि = \begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} + ट\begin{vmatrix} ख_1 & ख_1 & ग_1 \\ ख_2 & ख_2 & ग_2 \\ ख_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} + ठ\begin{vmatrix} ग_1 & ख_1 & ग_1 \\ ग_2 & ख_2 & ग_2 \\ ग_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$

दक्षिण पक्षांतील शेवटच्या दोन निश्चायकांच्या अर्हा (३) वरून शून्य येतात. म्हणून

$$नि = \begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$

१५.४ उदाहरण १—

$$\begin{vmatrix} ख+ग & क & १ \\ ग+क & ख & १ \\ क+ख & ग & १ \end{vmatrix}$$ ह्या निश्चायकाची

अर्हा शून्य आहे हें दाखवा.

दुसऱ्या स्तंभांतील संघटक क्रमशः पहिल्या स्तंभांतील संघटकांत मिळवा. निश्चायकाचें नि ने अभिधान केल्यास

$$नि = \begin{vmatrix} ख+ग+क & क & १ \\ ग+क+ख & ख & १ \\ क+ख+ग & ग & १ \end{vmatrix}$$

आता पहिल्या स्तंभांतील प्रत्येक संघटकांत (क+ख+ग)

हा गुणक आहे. तो बाहेर काढल्यानंतर

$$\text{नि} = (\text{क}+\text{ख}+\text{ग})\begin{vmatrix} १ & \text{क} & १ \\ १ & \text{ख} & १ \\ १ & \text{ग} & १ \end{vmatrix}$$

आता $\begin{vmatrix} १ & \text{क} & १ \\ १ & \text{ख} & १ \\ १ & \text{ग} & २ \end{vmatrix}$ चे दोन स्तंभ सर्वांगसम आहेत.

म्हणून $\begin{vmatrix} १ & \text{क} & १ \\ १ & \text{ख} & १ \\ १ & \text{ग} & १ \end{vmatrix} = ०$

म्हणून नि $= ०$

उदाहरण २—

$$\begin{vmatrix} \text{खग} & \text{क} & \text{क}^२ \\ \text{गक} & \text{ख} & \text{ख}^२ \\ \text{कख} & \text{ग} & \text{ग}^२ \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} १ & \text{क}^२ & \text{क}^३ \\ १ & \text{ख}^२ & \text{ख}^३ \\ १ & \text{ग}^२ & \text{ग}^३ \end{vmatrix}$$

हे ऐकात्म्य सिद्ध करा.

वाम पक्षाच्या निश्चायकाचे नि ने अभिधान करून

$$\text{नि} = \begin{vmatrix} \text{खग} & \text{क} & \text{क}^२ \\ \text{गक} & \text{ख} & \text{ख}^२ \\ \text{कख} & \text{ग} & \text{ग}^२ \end{vmatrix}$$

आता पहिल्या पंक्तीस क ने, दुसऱ्या पंक्तीस ख ने आणि तिसऱ्या पंक्तीस ग ने गुणून

$$\text{कखग नि} = \begin{vmatrix} \text{कखग} & \text{क}^२ & \text{क}^३ \\ \text{कखग} & \text{ख}^२ & \text{ख}^३ \\ \text{कखग} & \text{ग}^२ & \text{ग}^३ \end{vmatrix}$$

दक्षिण पक्षांतील निश्चायकाच्या पहिल्या स्तंभांतील घटकांतील क ख ग हा साधारणगुणक बाहेर काढून

$$कखग\ नि = कखग \begin{vmatrix} १ & क^२ & क^३ \\ १ & ख^२ & ख^३ \\ १ & ग^२ & ग^३ \end{vmatrix}$$

$$अर्थात्\ नि = \begin{vmatrix} १ & क^२ & क^३ \\ १ & ख^२ & ख^३ \\ १ & ग^२ & ग^३ \end{vmatrix}$$

$$म्हणजेच \begin{vmatrix} खग & क & क^२ \\ गक & ख & ख^२ \\ कख & ग & ग^२ \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} १ & क^२ & क^३ \\ १ & ख^२ & ख^३ \\ १ & ग^२ & ग^३ \end{vmatrix}$$

उदाहरण ३— $\begin{vmatrix} १ & १ & १ \\ क & ख & ग \\ क^२ & ख^२ & ग^२ \end{vmatrix}$ ची अर्हा काढा.

दिलेल्या निश्चायकाच्या दुसऱ्या स्तंभाचे संघटक क्रमशः पहिल्या स्तंभाच्या संघटकांतून आणि तिसऱ्या स्तंभाचे संघटक क्रमशः दुसऱ्या स्तंभाच्या संघटकांतून उणे करून

$$\begin{vmatrix} १ & १ & १ \\ क & ख & ग \\ क^२ & ख^२ & ग^२ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ० & ० & १ \\ क-ख & ख-ग & ग \\ क^२-ख^२ & ख^२-ग^२ & ग^२ \end{vmatrix}$$

आता दक्षिण पक्षाच्या निश्चायकाच्या पहिल्या स्तंभांत (क—ख) आणि दुसऱ्या स्तंभांत (ख—ग) हे साधारण गुणक आहेत. ते बाहेर काढून

$$दक्षिण\ पक्ष = (क-ख)(ख-ग) \begin{vmatrix} ० & ० & १ \\ १ & १ & ग \\ क+ख & ख+ग & ग^२ \end{vmatrix}$$

आता दक्षिण पक्षाच्या निश्चायकाच्या पहिल्या पंक्तीतील संघटकाच्या पदांमध्ये विस्तार केल्यास दक्षिण पक्ष

$$= (क - ख)(ख - ग)[ख + ग - क - ख]$$
$$= (क - ख)(ख - ग)(ग - क)$$

म्हणून $\begin{vmatrix} १ & १ & १ \\ क & ख & ग \\ क^२ & ख^२ & ग^२ \end{vmatrix} = (क - ख)(ख - ग)(ग - क)$

१५.५ उपनिश्चायक (minors) आणि सहगुणक (co-factors)

$\begin{vmatrix} क_१ & ख_१ & ग_१ \\ क_२ & ख_२ & ग_२ \\ क_३ & ख_३ & ग_३ \end{vmatrix}$ ह्या निश्चायकांत $क_१$ हा संघटक पहिल्या पंक्तींत आणि पहिल्याच स्तंभांत आहे. पहिली पंक्ति आणि पहिला स्तंभ यांचें निग्रहण (suppress) करून उरलेल्या निश्चायकास $क_१$ चा उपनिश्चायक म्हणतात.

निश्चायकाचें 'नि' ने अभिधान आणि $क_१$ च्या उपनिश्चायकाचें $नि_{क_१}$ ने अभिधान करतात. त्याचप्रमाणे $नि_{ख_१}$ व $नि_{ग_१}$ यांनी क्रमशः $ख_१$ आणि $ग_१$ यांच्या उपनिश्चायकांचें अभिधान करतात.

ह्यावरून पहिल्या पंक्तींतील संघटकांच्या पदांत दिलेल्या निश्चायकाचा विस्तार केल्यास

$नि = क_१ नि_{क_१} - ख_१ नि_{ख_१} + ग_१ नि_{ग_१}$

त्याप्रमाणे पहिल्या स्तंभांतील संघटकांच्या पदांत दिलेल्या निश्चायकाचा विस्तार केल्यास

$नि = क_१ नि_{क_१} - क_२ नि_{क_२} + क_३ नि_{क_३}$

निश्चायकांतील एखाद्या संघटकाचा सहगुणक म्हणजे त्याच संघटकाचा, योग्य चिह्नासहित घेतलेला उपनिश्चायक होय. म्हणून सहगुणकाला चिह्नित उपनिश्चायक असेंहि

म्हणतात.

सहगुणकाच्या उपयोगाने निश्चायकाच्या विस्तारांत सर्व पदांची चिन्हें तींच असतात.

कोणत्याहि संघटकाच्या सहगुणकाचें, त्याच संघटकाच्या आकारान्त अक्षराने अभिधान करतात. उदा० $क_1$, $ख_1$, $ग_1$ यांच्या सहगुणकांचें क्रमशः $का_1$, $खा_1$, $गा_1$ यांनी अभिधान करतात.

निश्चायकाचें नि ने अभिधान करून सहगुणकाचा उपयोग केल्यास

$$नि = क_1 का_1 + ख_1 खा_1 + ग_1 गा_1$$

$$किंवा \quad नि = क_1 का_1 + क_2 का_2 + क_3 का_3$$

एखाद्या संघटकाचा सहगुणक, योग्य चिन्हासहित घेतलेला उपनिश्चायक असल्यामुळें, उपनिश्चायकावरून त्याच्या संवादी सहगुणकाची अर्हा काढण्यासाठी खालील नियमाचा उपयोग करतात.

नियम— ज्या संघटकाच्या सहगुणकाची अर्हा काढण्याची आहे त्याचें स्थान पंक्तीवरुन, स्तंभावरून किंवा दोहोंवरून अग्र संघटकापासून कितवें आहे तें पहा. या स्थानाची संख्या विषम अथवा सम असेल तदनुसार त्याचा सहगुणक त्याच्या संवादी उपनिश्चायकासमान किंवा ऋण चिन्हासहित घेतलेल्या त्याच उपनिश्चायकासमान असतो.

उदाहरण— $ख_3$ चा सहगुणक $खा_3$ आणि उपनिश्चायक $नित_3$ आहे. आता $ख_3$ चें स्थान अग्रसंघटक $क_1$ पासून चवथें म्हणजे सम असल्यामुळे $खा_3 = -नित_3$

अर्हा काढा—

(१) $\begin{vmatrix} २४ & ८ & ३ \\ १५ & ७ & १ \\ ११ & २ & ४ \end{vmatrix}$  (२) $\begin{vmatrix} १९ & २ & १७ \\ ७ & ५ & २ \\ १२ & ३ & ९ \end{vmatrix}$

(३) $\begin{vmatrix} ४ & २ & ५ \\ १ & १ & ६ \\ ७ & ३ & ० \end{vmatrix}$  (४) $\begin{vmatrix} ५२ & १३ & ६७ \\ ५० & १७ & ८९ \\ ७२ & १९ & १०२ \end{vmatrix}$

(५) $\begin{vmatrix} क & ज & छ \\ ज & ख & च \\ छ & च & ग \end{vmatrix}$  (६) $\begin{vmatrix} १ & ओ & ओ^2 \\ ओ & ओ^2 & १ \\ ओ^2 & १ & ओ \end{vmatrix}$ (ओ हे १ चें घनमूळ आहे)

(७) खालील निश्चायकाची अर्हा शून्य आहे हें दाखवा.

$$\begin{vmatrix} १ & क & क^2 - खग \\ १ & ख & ख^2 - कग \\ १ & ग & ग^2 - कख \end{vmatrix} = ०$$

(८) $\begin{vmatrix} क+ख & ख+ग & ग+क \\ त+थ & थ+द & द+त \\ ट+ठ & ठ+ड & ड+ट \end{vmatrix} = २\begin{vmatrix} क & ख & ग \\ त & थ & द \\ ट & ठ & ड \end{vmatrix}$ आहे हें दाखवा.

(९) $\begin{vmatrix} य & क_1 & क_2 \\ क_1 & य & क_2 \\ क_1 & क_2 & य \end{vmatrix} = (य - क_1)(य - क_2)(य + क_1 + क_2)$

आहे हें दाखवा. [रंगून १९३९

(१०) $\begin{vmatrix} ख^2ग^2 & खग & ख+ग \\ ग^2क^2 & गक & ग+क \\ क^2ख^2 & कख & क+ख \end{vmatrix}$ ची अर्हा काढा.

# उत्तरें

## प्रश्नसंग्रह १

(१) य=३, र=४ (२) य=७, र=८

(३) $य=\frac{३}{२}, र=\frac{५}{२}$ (४) $य=-\frac{४}{३}, र=\frac{७}{३}$

## प्रश्नसंग्रह २

(१) (अ) $\frac{य^{३}}{र^{४}}$ (आ) $\frac{१}{य^{\frac{१}{२}}}$ (इ) $\frac{१}{र^{\frac{५}{६}}}$ (ई) $\frac{य^{\frac{३}{५}}}{र^{\frac{१}{३}}}$

(उ) $\frac{१}{य^{\frac{२}{३}}}$ (ऊ) $\frac{१}{य^{\frac{५}{२}}र^{\frac{३}{२}}}$

(२) (अ) २ (आ) $\sqrt{३}$ (इ) $\frac{३२}{३}$ (ई) $\frac{१६}{२५}$

(३) $\frac{र^{४}}{य}$ (४) दुसरी मोठी आहे. (५) $\frac{२७}{४}$

(६) (अ) य−१ (आ) $य^{\frac{३}{४}}-र^{\frac{३}{४}}$ (इ) $४य^{२}+४य^{-२}+८$

(७) $य^{\frac{४}{२}} + य^{४}र^{\frac{१}{३}} + य^{\frac{३}{२}}र^{\frac{२}{३}} + य र + य^{\frac{१}{२}}र^{\frac{४}{३}} + र^{\frac{५}{३}}$

(८) (क) $\dfrac{१}{य^{\frac{५३}{१२}}रल^{\frac{१९}{१२}}}$ (ख) $\dfrac{य^{२त} - र^{२य}}{य^{त}र^{य}}$

(ग) $य^{\frac{१३}{६}}$ (घ) $य\, र^{\frac{१}{१५}}ल^{\frac{१२}{१५}}$

(ङ) १ (च) $य^{त^{२}-य^{२}-२त^{३}}$

(छ) $\dfrac{१}{४२८८}$ (ज) १

(९) (क) $र^{२} - २$ (ख) $र^{३} - ३र$ (ग) $र^{४} - ४र^{२} + २$

(१४) $म = \dfrac{न}{न - १}$

## प्रश्नसंग्रह ३

(१) $५\sqrt{६},\ ८ \times \sqrt[३]{५},\ २\sqrt{३},\ ४ \times \sqrt[४]{३},\ २ \times \sqrt[५]{१९}$

(२) (१) $७ - \sqrt{३}$, (२) $३ - \sqrt{५}$ (३) $\sqrt{३} - \sqrt{२}$

(३) (१) $७^{\frac{२}{३}} - २ \times ७^{\frac{१}{३}} + ४$ (२) $५^{\frac{२}{३}} - ३ \times ५^{\frac{१}{३}} + ९$

(३) $३^{\frac{२}{३}} - ३^{\frac{१}{३}}२^{\frac{१}{३}} + २^{\frac{२}{३}}$

(४) (१) $२ - \sqrt{३}$ (२) $\dfrac{२ + \sqrt{२}(१ - \sqrt{३})}{४}$

(३) $\dfrac{७ - ३\sqrt{३} - \sqrt{५} + २\sqrt{१५}}{११}$

(५) $\frac{२}{३}\sqrt{५}[\sqrt{५}-१]$

(६) (१) ३ − २ श (२) १ − ३ श (३) ७ − ५ श

(७) (१) १७ + ७ श (२) १० + ५४ श

(८) (क) $\frac{३-२श}{१३}$ (ख) $\frac{७-८श}{११३}$ (ग) $\frac{३-\sqrt{-२}}{११}$

(घ) $\frac{३२३-३६श}{३२५}$

(९) (१) −१ + २श (२) $-\frac{१}{५}+\frac{२}{५}श$

(३) (३क + २ख) + (३ − २कख)श

(४) $२(१-\sqrt{३})+२(१+\sqrt{३})श$

(१०) (१) य = २, र = −३ (२) य = ३, र = −५

(३) य = २, र = −२ (४) य = ४, र = १

$य = ६, र = -\frac{२}{३}$

(११) (१) ±[३ + ४श] (२) ±[३ + २श]

(३) ±[२ − श]

## प्रश्नसंग्रह ४

(१) (अ) $\frac{१}{३}(२९-२स)$ (आ) ७स − ५ (इ) ९स − ५

(ई) $\frac{स}{क}$ (उ) $\frac{स^{२}-स+१}{स}$

(२) (अ) ८६७$\frac{१}{२}$ (आ) ८४० (इ) ९२$\frac{१}{२}$

(ई) ६$\frac{१}{४}$ (उ) ३३२·८५ (ऊ) १३५५$\sqrt{५}$

(ए) $\frac{स}{२}\left[(५+स)क-२ख(४+स)\right]$ (ऐ) $स^२$

(३) (अ) $\frac{५}{३}, \frac{२५}{१२}, \frac{५}{२}$.........

(आ) ७, १२, १७,......

(इ) ६, ११, १६, २१......

(ई) $स^२+१-स, स^२+२(१-स), स^२+३(१-स)$

(उ) $क+\frac{ख-क}{२(स+१)}, \quad क+\frac{ख-क}{स+१}, \quad क+\frac{३(ख-क)}{२(स+१)}$

$$मध्यपद=\frac{क}{२}+\frac{ख}{२}$$

(५) १६५

(६) $प_{५०}=१०५$; $यो_{५०}=२८००$ (८) १३, १७, २१

(९) २, ३$\frac{१}{२}$, ५, ६$\frac{१}{२}$, ८ (११) ३७ (१२) ७२

(१३) २० (१४) १६ (१५) २५ (१६) १४

(१७) ३६ (१८) २५ (१९) ५०'५०० यष्टी

(२३) $\frac{४}{५}$ (२९) क, ३ क, ५ क,.... (३१) $-(त+थ)$

# प्रश्नसंग्रह ५

(१) (१) −५१२ (२) $\frac{१५}{३२}$

(३) $-\frac{१२८}{१०९३५}$ (४) $\frac{२^{स-१}}{३}$

(२) (१) २०४६ (२) $\frac{१३३}{२४३}$

(३) $\frac{६३\,(२+\sqrt{२})}{३२}$ (४) $\frac{८}{२१}\left[१+(-)^{स+१}\times\left(\frac{३}{४}\right)^{स}\right]$

(५) $\frac{क^{ट}\left[१-क^{सठ}\right]}{१-क^{ठ}}$

(६) $$\frac{\frac{क}{य}\sqrt{\frac{५}{३}}\left[१-\left(\sqrt{\frac{३य}{५क}}\right)^{स}\right]}{१-\sqrt{\frac{३य}{५क}}}$$

(३) ३, ६, १२ (४) $\frac{४}{५}$, ४, २०

(८) ६ (९) $\frac{३^{स}-१}{२}$

(१०) (१) $\frac{१}{९}, \frac{१}{३}$, १, ३ (२) ६, १८, ५४, १६२

(३) $\frac{१६}{२७}, \frac{८}{९}, \frac{४}{३}$, २, ३ (४) ९, ३, १, $\frac{१}{३}$, ९

(११) $\left(\frac{१}{२}\right)^{\frac{३}{२}}$

(१२) ३, १२ (१६) $\frac{क}{न-१}\left[\frac{न\,(न^{स}-१)}{न-१}-स\right]$

[यांत क हें आद्य पद, न ही साधारण निष्पत्ति आहे]

(२३) $\sqrt{मन}$, $म\left(\frac{न}{म}\right)^{\frac{त}{२४}}$ (२४) $८\frac{४०}{९३}$, $१२\frac{६०}{९३}$

## प्रश्नसंग्रह ६

(१) (क) $\frac{१}{१-य}+\frac{२य}{(१-य)^{२}}-\frac{२य^{स}}{(१-य)^{२}}-\frac{(२स-१)य^{स}}{१-य}$

(ख) $४-\frac{१}{२^{स-२}}-\frac{स}{२^{स-१}}$

(ग) $-\frac{७}{६}-\frac{५}{३६}\left[७^{स+१}-७\right]+\frac{५स+१}{६}\times ७^{स+१}$

(२) (१) $\frac{३}{२}(\sqrt{३}+१)$ (२) $\frac{९}{४}$ (३) $\frac{८\sqrt{५}}{३}$

(४) $\frac{४+३\sqrt{२}}{२}$

(३) (क) $\frac{३}{७}$ (ख) $\frac{२५}{१६}$ (ग) ६ (घ) १

(४) (क) $\frac{३स(स+१)}{२} + \frac{५}{४}(५^{स} - १)$

(ख) $\frac{य(१-य^{स})}{१-य} + \frac{क स(स+१)}{२}$ (ग) $\frac{कय - ख}{य^{२} - १}$

(घ) $कस^{२} + ख(२^{स} - १)$

(५) $\frac{८}{३} + \frac{१}{३\times२^{२स-२}} - \frac{१}{३\times२^{स-३}}, - \frac{१}{३\times२^{स-२}}, \frac{८}{३}$

(६) सर्व पद $= खय^{स-१}(य-१)$. प्रथम पद क+खय आहे. प्रथमपदानंतर सर्व पदें गुणोत्तर श्रेढींत आहेत.

(७) (क) $\frac{८५७}{२४७५}$ (ख) $\frac{५}{९}$ (ग) $\frac{४७}{१९८}$

(१०) ९

## प्रश्नसंग्रह ७

(१) (अ) $\frac{१}{६८}, \frac{१}{१३२}, \frac{१}{१९६}, \frac{१}{२६०}$ (आ) $\frac{१६}{५}, \frac{१४}{६}, \frac{१२}{७}$

(इ) $\frac{१५०}{१२१}, \frac{७५}{४६}, \frac{५०}{२१}, \frac{७५}{१७}$ (ई) $\frac{३}{४}, \frac{६}{११}, \frac{३}{७}, \frac{६}{१७}, \frac{३}{१०}$

(२) $\frac{१}{३}, \frac{१}{४}, \frac{१}{५}$ (३) $\frac{(न-१) क ग}{क (न-१) + ग(स-न)}$

(८) ८, ७२ (९) १२, ३

## प्रश्नसंग्रह ८

(१) (क) $\frac{२}{३}$ स (स + १)(२स + १)

(ख) $\frac{१}{३}$ स (४स$^{२}$ − १)

(ग) $\frac{१}{१२}$ स (स + १)(३स$^{२}$ + १९स + ८)

(घ) $\frac{१}{१२}$ स (स + १)(स + २)(३स + १)

(च) $\frac{स}{२}$ (६स$^{२}$ + ३स − १)

(छ) स$^{२}$ (२स$^{२}$ − १)

(ज) स सम असल्यास $-\frac{स}{२}$ (स + १)

स विषम असल्यास $\frac{स}{२}$ (स + १)

(२) (क) २$^{स}$ + १ ; २ (२$^{स}$ − १) + स

(ख) स$^{२}$ + १ ; $\frac{१}{६}$ स (२स$^{२}$ + ३स + ७)

(ग) $\frac{१}{२}(३^{स}-१)$ ; $\frac{३}{४}(३^{स}-१)-\frac{स}{२}$

(५) (क) $\frac{१}{३}$ स (स+१)(स+२)

(ख) $\frac{स}{६}$ (४स$^{२}$+१५स+१७)

(ग) $\frac{१}{६}$ स (स +१)(९स$^{२}$+१९स+८)

(घ) $\frac{१}{२४}$ स (स+१)(स+२)(३स+१)

(ङ) $\frac{१}{१२}$ स (स+१)(३स$^{२}$+११स+४)

(च) $\frac{१}{६}$ स (स+१)(२स$^{२}$+२स−१)

(छ) $\frac{१}{३}$ स (स+१)(८स$^{२}$+८स−१)

(ज) $\frac{१}{४८}$ स (स+१)(स+२)(३स+५)

(झ) $\frac{१}{६}$ स (स$^{२}$−१)

(ज) $\frac{१}{१२}$ स $(स+१)^२$ $(स+२)$

(६) (क) $\left[\frac{१०}{९}\ (१०^{स}-१)-स\right]$

(ख) $\left[\frac{१०}{२७}(१०^{स}-१)-\frac{स}{३}\right]$

(ग) $\left[\frac{२०}{२७}(१०^{स}-१)-\frac{२स}{३}\right]$

## प्रश्नसंग्रह ९

(१) (१) वास्तविक आणि भिन्न; १,३

(२) वास्तविक आणि अपरिमेय; $१\pm\sqrt{३}$

(३) वास्तविक आणि समान; ७,७

(४) संकर; $१\pm\sqrt{-१\cdot३}$

(२) (१) $य^२-१२य+३५=०$ (२) $य^२-य-१२=०$

(३) $य^२+८य+१५=०$ (४) $य^२-२य-१=०$

(५) $य^२+४य+१=०$ (६) $य^२-६य-३२=०$

(७) $य^२+६य+१३=०$

(८) $य^२+२कय+क^२-८ल=०$

(३) (१) २, $\frac{१}{२}$ (२) $-\frac{२}{३}$ (३) $-\frac{५}{२}$

(९) (१) क आणि ग यांचें चिह्न समान परंतु ख चें चिह्न विरुद्ध. (२) क आणि ख यांचें चिह्न समान परंतु ग चें चिह्न विरुद्ध.

(१०) १०, $४\sqrt{६}$, १

(१२) (१) $\dfrac{ख^४ - ४ख^२कग + २क^२ग^२}{क^४}$

(२) $\dfrac{ख^४ - ४ख^२कग + २क^२ग^२}{क^३ग}$

(३) $\dfrac{ग^२ख(ख^२ - ३कग)}{क^५}$

(१४) (१) $\dfrac{त}{थ^३}(त^२ - ३थ)$

(२) $\dfrac{त\sqrt{त^२ - ४थ}\,(त^२ - २थ)}{थ^३}$

(३) $\dfrac{त(त^२ - २थ)\sqrt{त^२ - ४थ}}{थ^४} \times$

$(त^४ + ४थ^२ - ४त^२थ - २त^२थ^२)$

(१५) $य^३ + ३ = ०$ (१६) $३य^२ + १ = ०$

(१७) (१) $खग\,य^२ + (कग + ख^२)\,य + कख = ०$

(२) $क^२य^२ - २क^२(ख^२ - २कग)य$

$+ ख^२(ख^२ - ४कग) = ०$

(१८) (१) $थय^२ - (त^२ - २थ)य + थ = ०$

(२) $थय^२ - २तय + ४ = ०$

(३) $थ^२य^२ - त(त^२ - ३थ)य + १ = ०$

(४) $य^२ - (त + \frac{त}{थ})य + २ + थ + \frac{१}{थ} = ०$

## प्रश्नसंग्रह १०

(१) $\frac{८}{३} < य < -\frac{५}{२}$

(२) $३ < य < -२$

(३) $२ < य < ७$

(१४) (१) $त = -३$ (२) $त = १०$ (३) $त = २$

(१५) $-\frac{११}{४}$ अथवा $\frac{७}{८}$

(२१) $क = ०$ अथवा ९

(२२) $[क क_१ - ख ख_१]^२ + ४ [ज ख_१ + ज_१ क] \times [ख ज_१ + क_१ ज] = ०$

## प्रश्नसंग्रह ११

(१) $य = २७, \frac{१२५}{३०८७}$ (२) $य = २, य = ८$

(३) $य = ०, \quad य = -\frac{३}{४}$ (४) $य = -४$

(५) $य = १, २, \frac{३ \pm \sqrt{-१}}{२}$

(६) $य = २, -३, \frac{-३ \pm \sqrt{-१४३}}{६}$

(७) $य = -६, -२, \frac{-१५ \pm \sqrt{४१}}{२}$

(८) $य = ०, \ -५, \frac{-५ \pm \sqrt{-१५}}{२}$

(९) $य = -४, \ -४ \pm \sqrt{१७}$ (१०) $य = ७$

(११) $य = २, \ -\frac{१}{२}$ (१२) $य = ०, -३$

(१३) $य = ०, \ ३$ (१४) $य = \pm ३$

(१५) $य = १, \ २$ (१६) $य = -\frac{४}{९}, ५$

(१७) $य = ४, \frac{१}{४}, २, \frac{१}{२}$ (१८) $य = -२, \frac{१}{२}, -\frac{३}{२}, \frac{२}{३}$

(१९) $य = -५, -\frac{१}{५}, -३, -\frac{१}{३}$

(२०) $य = १, \frac{१}{२}, २, \frac{३}{२}, \frac{२}{३}$

# प्रश्नसंग्रह १२

(१) $य = २$, $र = १$; $य = १$, $र = २$ (२) $य = २, र = १$; $य = १४, र = -२९$ (३) $य = \frac{३}{५}$, $र = \frac{४}{५}$

(४) $य = १, र = -२$; $य = -\frac{३८}{१३}$, $र = \frac{८}{१३}$

(५) $य = १$, $र = ५$; $य = ४$, $र = २$ (६) $य = ६$, $र = ३$; $य = ३$, $र = ६$ (७) $य = \frac{१}{३}$, $र = \frac{१}{२}$;

$य = \frac{५}{२}, र = -\frac{५}{३}$

(८) $य = २$, $र = ८$; $य = ८$, $र = २$ (९) $य = ३$, $र = ६$; $य = ६$, $र = ३$ (१०) $य = २३$, $र = १$; $य = २$, $र = २२$

(११) $य = ४$, $र = ८$; $य = ८$, $र = ४$

(१२) $य = १$, $र = ३$; $य = -१$, $र = -३$,

$य = \frac{३\sqrt{२१}}{२१}, र = \frac{२\sqrt{२१}}{२१}$;

$य = -\frac{३\sqrt{२१}}{२१}$, $र = \frac{-२\sqrt{२१}}{२१}$

(१३) $य = २,\ र = ३;\ य = -२,\ र = -३$

$$य = \pm \frac{४३}{\sqrt{१५१}},\ र = \pm \frac{२३}{\sqrt{१५१}}$$

(१४) $य = \pm २,\ र = \pm २;$

$$य = \pm \frac{२}{३}\sqrt{६},\ र = \pm \frac{४}{३}\sqrt{६}$$

(१५) $य = \pm \frac{२}{७}\sqrt{३५},\ र = \pm \frac{\sqrt{३५}}{७};$

$$य = \pm \frac{३}{२},\ र = \pm \frac{२}{३}$$

(१६) $य = \pm २,\ र = \pm ३;\ य = \pm ३,\ र = \pm २$

(१७) $य = -२,\ र = ३;\ य = -\frac{१}{२},\ र = ०;\ य = १,\ र = १;$

$य = ३\frac{१}{२},\ र = -५\frac{१}{४}$

(१८) $य = ३,\ र = १;\ य = -१,\ र = -३;\ य = १ \pm \sqrt{-१०}$

$र = -१ \pm \sqrt{-१०}$

(१९) $य = ५,\ र = १;\ य = १,\ र = ५$

$य = ३ \pm \sqrt{-५८},\ र = ३ \mp \sqrt{५८}$

(२०) $य = ३,\ र = १;\ य = -१,\ र = -३;$

$य = \pm \sqrt{-६} + १,\ र = \pm \sqrt{-६} - १$

(२१) $य = ७,\ र = ५;\ य = -५,\ र = -७$

(२२) $य = \frac{४}{५}$, $र = २०$; $य = \frac{१}{५}$, $र = ५$

(२३) $य = -३$, $र = -२$; $य = १$, $र = २$

(२४) $य = ३$, $र = १$; $य = १$, $र = ३$

(२५) $य = ४$, $र = २$; $य = -२$, $र = -४$;

$$य = १ \pm \frac{\sqrt{३}}{११}, \quad र = -१ \pm \frac{\sqrt{३}}{११}$$

(२६) $य = ३$, $र = ३$; $य = -\frac{१}{३}$, $र = -\frac{१}{३}$

$$य = ३, \quad र = -\frac{१}{३}; \quad य = -\frac{१}{३}, \quad र = ३$$

(२७) $य = \pm १$, $र = \pm ३$; $य = \pm ३$, $र = \pm १$

(२८) $य = \pm १$, $र = \pm २$; $य = \pm २$, $र = \pm १$

(२९) $य = २$, $र = ४$; $य = -२\frac{१}{३}$, $र = -४\frac{३}{३}$

(३०) $य = ४\frac{१}{३}$, $र = ०$; $य = ९$, $र = ७$

## प्रश्नसंग्रह १३

(१) $य = \pm ५ \sqrt{\frac{१७}{१७७}}$, $र = \pm ६ \sqrt{\frac{१७}{१७७}}$,

$$ल = \pm ७ \sqrt{\frac{१७}{१७७}}$$

(२) $य = \pm २$, $र = \pm ६$, $ल = \pm ३$

(३) $य = ३$, $र = २$, $ल = ४$; $य = २$, $र = ३$, $ल = ४$;

$य = २ + \sqrt{-२}$, $र = २ - \sqrt{-२}$, $ल = ५$

$य = २ - \sqrt{-२}$ $र = २ + \sqrt{-२}$ $ल = ५$

(४) $य = १$, $र = ३$, $ल = २$; $य = ५$, $र = १$, $ल = ०$

$य = १$, $र = २$, $ल = ३$; $य = ५$, $र = ०$, $ल = १$

(५) $य = \frac{१}{२}$, $र = \frac{१}{३}$, $ल = \frac{१}{४}$

(६) $य = \pm १$, $र = \pm २$, $ल = \pm ३$

(७) $य = ५$, $र = \frac{५}{३}$, $ल = \frac{५}{२}$;

$य = -७$, $र = -\frac{११}{३}$, $ल = -\frac{१}{२}$

(८) $य = ५$, $र = ३$, $ल = ६$;

$य = -७$, $र = -५$, $ल = -८$

(९) $य = ३$, $र = ४$, $ल = ५$;

$य = -१३$, $र = -१४$, $ल = -१५$

(१०) $य = २$, $र = ३$, $ल = १$;

$य = -६$, $र = -७$, $ल = -५$

(११) $य=२,\quad र=३,\quad ल=४;$

$य=-४,\quad र=-५,\quad ल=-६$

(१२) $य=१,\quad र=१,\quad ल=१;$

$य=-३,\quad र=-३,\quad ल=-३$

(१३) $य=३,\quad र=४,\quad ल=५;$

$य=-३,\quad र=-४,\quad ल=-५$

(१४) $$य=\frac{१+\sqrt{२ख+२ग-२क+१}}{२}$$

$$र=\frac{१+\sqrt{२क-२ख+२ग+१}}{२}$$

$$ल=\frac{१\pm\sqrt{२क+२ख-२ग+१}}{२}$$

(१५) $$य=\pm क\sqrt{\frac{ख+ग-क}{(क+ख-ग)(क+ग-ख)}}$$

$$र=\pm ख\sqrt{\frac{क+ग-ख}{(क+ख-ग)(ख+ग-क)}}$$

$$ल=\pm ग\sqrt{\frac{क+ख-ग}{(क+ग-ख)(ख+ग-क)}}$$

(१६) $य=\pm६,\ र=\pm४,\ ल=\pm५$

(१७) $$य=\pm\frac{त^२-थद}{\sqrt{त^३+थ^३+द^३-३तथद}}$$

$$र = \pm \frac{थ^2 - तद}{\sqrt{त^3 + थ^3 + द^3 - ३तथद}}$$

$$ल = \pm \frac{द^2 - तथ}{\sqrt{त^3 + थ^3 + द^3 - ३तथद}}$$

(१८) $य = \pm १, र = \pm २, ल = \pm ३$

## प्रश्नसंग्रह १४

(१) ५६ (२) ४८० (३) $^{१२}क_{८}$ (४) १००८०

(५) |१०, २ |८ (६) ५६ |९

(७) (१) $\frac{|१२}{|९}$ (२) $\frac{|११}{|७}$ (३) $\frac{|स}{|स-४}$

(४) $\frac{|स+२}{|स-१}$ (५) $\frac{|स+न}{|स-१}$

(८) (१) स (स − १) (२) |स − २ (स² − स − १)

(१०) ३६०० (११) १२ (१२) ९८८०, २०४७५, ८२५९८८८ (१३) ६०४८०, २५५०२४, ७४२५६०

(१४) न = स − १ (१६) ३० (१७) ६५ (१८) ३४४

(१९) $^{१५}च_{११} \times {}^{१३}च_{१०}$ (२०) ३५४ (२१) ९४५

(२२) २८. १०६६५६

(२३) $\dfrac{\underline{|\text{८}}\;\underline{|\text{८}}}{\underline{|\text{३}}\;\underline{|\text{४}}}$

(२४) २०१६, ३०२४ (२५) २० (२६) ६, ''च॰

(२७) ३५६७२००

(२८) $\dfrac{\underline{|\text{१२}}}{\underline{|\text{७}}\;\underline{|\text{५}}}$

(२९) ६०

(३०) $\dfrac{\underline{|\text{२९}}}{(\underline{|\text{४}})^{\text{२}}(\underline{|\text{६}})^{\text{३}}\underline{|\text{५}}}$

(३२) $\dfrac{\underline{|\text{१५}}}{\underline{|\text{६}}\;\underline{|\text{४}}\;\underline{|\text{५}}}$ (३३) $\dfrac{\underline{|\text{६}}}{(\underline{|\text{२}})^{\text{३}}}$

(३४) १५९ (३५) ११० (३६) ५० (३७) ५०

(३८) २४२ (३९) ४०९६ (४०) १२५ (४१) २१

(४२) ५३, ७५८ (४३) २२०

(४४) (१) $\frac{\text{१}}{\text{२}}$ [न(न − १) − म (म − १) + २]

(२) $\frac{\text{१}}{\text{६}}$[न(न − १) (न − २) − म (म − १) (म − २)]

(४६) ९०

# प्रश्नसंग्रह १९

(१) $\text{य}^{४} - ६९\text{य}^{२} - ४८\text{य} + ६७२$ (२) (क) ५ (ख) −५

(३) (१) $\text{य}^{५} + १०\text{य}^{४} + ४०\text{य}^{३} + ८०\text{य}^{२} + ८०\text{य} + ३२$

(२) $६४\text{य}^{६} + ५७६\text{र}\text{य}^{५} + २१६०\text{र}^{२}\text{य}^{४} + ४३२०\text{र}^{३}\text{य}^{३}$
$+ ४८६० \text{र}^{४}\text{य}^{२} + २९१६ \text{र}^{५}\text{य} + ७२९ \text{र}^{६}$

(३) $६२५ - २०००\text{य} + २४००\text{य}^{२} - १२८०\text{य}^{३}$
$+ २५६\text{य}^{४}$

(४) $१ - \frac{७}{\text{य}} + \frac{२१}{\text{य}^{२}} - \frac{३५}{\text{य}^{३}} + \frac{३५}{\text{य}^{४}} - \frac{२१}{\text{य}^{५}} + \frac{७}{\text{य}^{६}} - \frac{१}{\text{य}^{७}}$

(५) $\text{य}^{१०} + १५\text{क}\text{य}^{७} + ९०\text{क}^{२}\text{य}^{४} + २७०\text{क}^{३}\text{य}$
$+ ४०५\frac{\text{क}^{४}}{\text{य}^{२}} + २४३\frac{\text{क}^{५}}{\text{य}^{५}}$

(६) $२४३\text{य}^{५} - २०२५\text{य}^{२} + ६७५०\frac{१}{\text{य}} - ११२५०\frac{१}{\text{य}^{४}}$
$+ \frac{९३७५}{\text{य}^{७}} - \frac{३१२५}{\text{य}^{१०}}$

(४) (अ) $१३६१३६७० \text{क}^{८}\text{य}^{८}$ (आ) $१६५ \frac{\text{य}^{५}}{\text{क}^{५}}$

(इ) $-१२० \frac{\text{य}^{४}}{\text{क}^{४}}$ (ई) $७६०\text{र}^{६}\text{य}$

(५) $-२५२$ अथवा $(-)^{५}\ {}^{१०}च_{५}$

(६) $०,\ २१० क^{११} ख^{६}$ (७) $३१२ र^{११}$

(८) $२१० ग^{१२}$ (९) $-{}^{१०१}च_{३१}\ ३^{३१}$

(१०) जर स, ३ चा अपवर्त्य असेल तर ${}^{२स}च_{\frac{स}{३}}\ (-३क^{३})^{\frac{स}{३}}$

नाहीतर कोणतेहि पद नाही.

(११) ${}^{३स}च_{स}\ य^{-स}$

(१४) ${}^{१३}च_{६}\ य^{६}क^{७}$ आणि ${}^{१३}च_{७}य^{७}क^{६}$

(१५) $-१५४ य$ आणि $\frac{१३८६}{य}$ (१६) $-६१२३६$

(१७) $\frac{\lfloor २स}{\lfloor स\ \lfloor स}$ (१८) ९ वे पद ४९५

(१९) ४ थे पद $\frac{५३७६}{२७}$ (२०) $न = १४$

(२१) $न = स + १$ (२४) $न = १३$

## प्रश्नसंग्रह १७

(१) ४५ (२) $२७१२ य^{५}$ (३) ०

(४) (१) ११वाँ पद (२) ५वाँ पद (३) १२वाँ पद

(५) $\frac{१६}{१७} < य < \frac{१७}{१६}$

(६) (१) $\frac{१६५}{८}$ (२) ${}^{११}च_{६}\left(\frac{३}{२}\right)^{६}$ (३) ${}^{२०}च_{१५}\; ३^{१५}$

(४) $-{}^{१०}च_{६} \times २^{१०}\left(\frac{४}{२५}\right)$

(७) $२^{न-१}(न+२)$

## प्रश्नसंग्रह १८

(१) (१) $(-)^{न}\frac{३\times५\times७\ldots\ldots(२न+१)}{२^{न}\;न}य^{न}$

(२) $\frac{१\times३\times५\ldots\ldots(२न-१)}{न}\left(\frac{य}{२}\right)^{न}$

(३) $(-)^{न}\frac{१\times३\times५\times७\ldots\ldots(२न-३)}{न}य^{न}$

(४) $(-)^{न}\ (न+१)\ य^{२न}$

(५) $\frac{१}{२७}\ \frac{[न+१]\ [न+२]}{१\times२}\left(\frac{य}{३}\right)^{न}$

(६) $ग\frac{१}{\sqrt{क}}\ \frac{(ल+१)\ (२ल+१)\ldots(न-१\ ल+१)}{ल^{न}\ \underline{|न}}\times$

$\left[\frac{य}{क}\right]^{न}$

(७) $\frac{२\times५\times८\times११\ldots\ (३\ न-१)}{\underline{|न}}\left(\frac{२\ य}{३}\right)^{न}$

(८) $\frac{४\times७\times१०\ldots\ (३\ न-२)}{\underline{|न}}\quad य^{न}$

(२) (१) $\frac{११\times१\times२३\times२७}{४^{९}}\ ५^{७}$

(२) $-९४५\ क^{-२४}\ ख^{३};\ -३०६१८\ क^{-३०}ख^{५}$

(३) $\frac{१}{२^{१४}}$

(३) $१-२\ य-२\ य^{२}-४\ य^{३}-\ldots\ldots$

(४) $क^{३}\left[१-\frac{३य}{क}+\frac{३}{२}\frac{य^{२}}{क^{२}}+\frac{य^{३}}{२क^{३}}+\frac{३य^{४}}{८क^{४}}+\frac{३य^{५}}{८क^{५}}+\ldots\right]$

$$\times \frac{\text{३}\times\text{१}\times\text{१}\times\text{३}\times\text{५}\ldots(\text{२न}-\text{५})}{\lfloor\text{न}} \; \frac{\text{य}^{\text{न}}}{\text{क}^{\text{३न}-\text{३}}}$$

(५) $\text{क}\left[\text{१}+\frac{\text{य}}{\text{२क}^{\text{२}}}-\frac{\text{य}^{\text{२}}}{\text{८क}^{\text{४}}}+\frac{\text{य}^{\text{३}}}{\text{१६क}^{\text{६}}}-\frac{\text{५}}{\text{१२८}}\frac{\text{य}^{\text{४}}}{\text{क}^{\text{८}}}+\ldots\ldots\right]$

(६) $-\frac{\text{७}\times\text{४}\times\text{१}\times\text{२}\times\text{५}\times\text{८}\ldots(\text{३न}-\text{१०})}{\lfloor\text{न}}$

(७) $\frac{\text{स}\,(\text{स}-\text{१})}{\text{२}}+[\,\text{स}(\text{स}+\text{१})\,]+\frac{(\text{स}+\text{१})\;(\text{स}+\text{२})}{\text{१}\cdot\text{२}}$

(८) (१) २रे पद (२) ७वाँ पद (३) ९वाँ पद

(९) (१) २·०२०१०१ (२) १·००३९

(३) १·०१००४० (४) ०·४२६७

(१०) (१) १२१ (२) $-\frac{\text{१}}{\text{४}}\left[\text{३}+\frac{\text{५}}{\text{३८}}\right]$

(३) २ (४) $\text{५}^{\text{स}+\text{१}}-\text{४}^{\text{स}+\text{१}}$

(५) $(-\text{२})^{\text{स}-\text{३}}\,(\text{स}-\text{८})$

(१२) ७१५

(१७) $\frac{१}{\sqrt[३]{\frac{४}{९}}}$ (१८) $\sqrt{३}$

(१९) २$\sqrt{२}$ (२०) (९$\sqrt{३}$ − ३)

(२३) $य = र - र^{२} + र^{३} - र^{४} + \ldots\ldots$

(२४) $य = \frac{१}{२} र - \frac{१ \times ३}{२ \times ४} र^{२} + \frac{१ \times ३ \times ५}{२ \times ४ \times ६} र^{३} - \ldots\ldots$

## प्रश्नसंग्रह १९

(१) ८, ७, −१, −२, −४ (२) ७, ५

(३) ४, ५, −४ (४) (क) ४ (ख) ६ (ग) ६ (घ) $\frac{१}{४२}$

(५) (अ) $\frac{३}{५}$छे क + ७छे ख − ८छे ग

(आ) छे क − ३छे ख + २छे ग

(इ) − छे क + ३ छे ख + ६ छे ग

(ई) छे क + ११छे ख − $\frac{१४}{३}$ छे ग

(८) (क) २ (ख) ५ (ग) −१ (घ) −३ (ङ) −६

(९) $\dfrac{छेक}{छेख - छेक}$

(१०) $य = १\cdot४६५$ (११) $य = २\cdot५६९$

(१२) $य = ०,\ र = ० ;\ य = ४,\ र = २$

(१३) $य = १६\cdot६३$

(१४) $य = १०^{दे[क+३ख]},\ र = १०^{दे(क-२ख)}$

## प्रश्नसंग्रह २०

(१) $१ - \dfrac{य}{\underline{|२}} + \dfrac{य^२}{\underline{|३}} - \dfrac{य^३}{\underline{|४}} + \dfrac{य^४}{\underline{|५}} - \ldots\ldots$

(२) $घा \left[ १ + य + \dfrac{२य^२}{\underline{|२}} + \dfrac{५य^३}{\underline{|३}} + \dfrac{१५य^४}{\underline{|४}} + \ldots\ldots \right]$

(३) $य - \dfrac{य^३}{\underline{|३}} + \dfrac{य^५}{\underline{|५}} - \dfrac{य^७}{\underline{|७}} + \ldots\ldots$

(५) $(-)^न \left[ \dfrac{१}{\underline{|न}} + \dfrac{२}{\underline{|न-१}} + \dfrac{३}{\underline{|न-२}} + \ldots\ldots \right]$

(६) $\frac{१}{१ - क}[घा - घा^{क}]$ (९) $घा + घा^{-१} - २$

(१०) (अ) $घा^{२} - घा$ (आ) $\frac{३\ घा}{२}$ (इ) घा

(ई) ५ घा (उ) ३ घा (ऊ) $५\ घा - ३$

(११) $३य - \frac{५\ य^{२}}{२} + \frac{९\ य^{३}}{३} - \frac{१७\ य^{४}}{५} + \ldots\ ..$

(१२) $\frac{क + ग}{य} - \frac{क^{२} + ख^{२}}{२\ य^{२}} + \frac{क^{३} + ख^{३}}{३\ य^{३}} - \ldots\ldots$

(१६) (अ) $१ - छे२$ (आ) $१ - २\ छे२$

(इ) $छे२ - \frac{१}{२}$ (ई) $छे\frac{६}{५}$

(१७) $य = र + \frac{र^{२}}{\underline{|२}} + \frac{र^{३}}{\underline{|३}} + \ldots\ldots$

(१९) ·८४५०९८०

## प्रश्नसंग्रह २१

(१) ९१ (२) ० (३) −८ (४) −५२

(५) $कखग + २चछज - कच^{२} - खछ^{२} - गज^{२}$

(६) ० (७) ० (१०) ०

# पारिभाषिक-शब्दावलि

## आंग्ल—मराठी

absurd असंगत
according as तदनुसार
accuracy परिशुद्धता
addition योग, संकलन
adjustment व्यवस्थापन
algebraic बीजीय
aliter अन्यथा
alternately एकान्तरत
alternative विकल्प
anti logarithm प्रतिच्छेदा
apparatus साधित्र
arithmetical progression समांतर श्रेढी
arithmetico - geometric - series समांतर गुणोत्तर श्रेढी
arithmetic mean समांतर मध्यक
arrangement arrange विन्यास करणें
arrow शर
article अनुच्छेद
ascending आरोही
assumption कल्पना
base आधार
binomial द्विपद
binomial coefficient द्विपद गुणक
binomial theorem द्विपद प्रमेय
bracket अभिचार
calculation परिगणन
cancel विलोपन, लोप करणें
case प्रकार, दशा
change परिवर्तन
characteristic लक्षण
classification वर्गीकरण
coefficient गुणक
co factor सहगुणक
column स्तम्भ
columnwise स्तम्भानुसार
combination संचय

commensurable समेय
committee समिति
common difference प्रचय
common factor समापवर्तक
common ratio साधारण निष्पत्ति
common system सामान्य पद्धति
complementary सपूरक
completely पूर्ण रूपेण
complex सकर
complex quantity सकर राशि
condition प्रतिबध
conditional equation प्रतिबधी समीकार
conjugate अनुबद्ध
conjugate quadratic surd अनुबद्ध वर्ग करणी
consecutive अनुगामी
constant अचल
*constant term* अचल पद
constituent सघटक
contain अन्तर्धारण
convergence अभिसार
convergent अभिसारी
corollary उपप्रमेय
correct शुद्ध
corresponding सवादी
cross multiplication तिर्यग् गुणन
cube root घन मूळ
dash प्राम
decimal दशमिक
decimal fraction दशमिक भिन्न
definite परिमित
*definition* परिभाषा
degree of accuracy परिशुद्धते ची मात्रा
delete अपमार्जन
denominator हर
denote अभिधान करणे
dependent परतंत्र
*descending* अवरोही
*determinant* निश्चायक
development विकास
diagonal विकर्ण
diagonally opposite विकर्णत सम्मुख
*digit* अक
dimension विमा
direct multiplication प्रत्यक्ष गुणन
discriminant विवेचक
discussion पर्यालोचन
dissimilar असमरूप
divergence अपसार
divergent अपसारी
dividend भाज्य
eliminant विरहित रूप

elimination निरसन
equality समता
equate समीकरण करणे
equation समीकार
equidistant समदूर
equivalent समार्ह
even युग्म
evolution मूल क्रिया
exactly सुतथ्यत
exactness सुतथ्यता
expansion विस्तार
exponential equation घात समीकार
exponential series घाताक श्रेढी
express व्यक्त करणे
expression व्यजक, पदसहति
extraction of a root वर्गमूळ निस्सारण
factor खण्ड
factorial हत *
finite परिमित
finite quantity परिमित राशि
finite series सात श्रेढी
form रूप
formula सूत्र
*fraction* भिन्न
fractional भिन्नीय
function श्रित **
fundamental मूलभूत
generally सामान्यत
general *term* सामान्य पद
geometrical progression गुणोत्तर श्रेढी
geometric mean गुणोत्तर मध्यक
*greatest* महत्तम
group समूह
harmonical prgoression हरात्मक श्रेढी
harmonic mean हरात्मक मध्यक

---

* The 'product' of all the integers in serial order from one onwards

** A quantity which takes on a definite value, or values when special values are assigned to certain other quantities called the argument or independent variables of the func tion This term is used mostly to point out *dependence* on some certain variable or variables ( Mathematics Dictionary by G James and R C James ) 'dependent from root श्रि to depend on from which the noun आश्रय is well known

homogeneous समानघात
homogeneous equation समानघात समीकार
homogeneous function समानघात फित
hypotenuse कर्ण (ancient word)
hypothesis उपकल्पना
identical सर्वांगसम
identity ऐकात्म्य
illustrative निदर्शनात्मक
imaginary काल्पनिक
imaginary part काल्पनिक घटक
incommensurable असंमेय
incommensurability असंमेयता
increase वर्धन
indefinite अपरिमित, अनियत
independent स्वतंत्र
index घातांक*
infinite अनंत
infinite series अनंत श्रेढी
infinity अनंती
insertion निवेशन
instructive बोधात्मक
in the limit सीमान्ती
integral अनुकल, पूर्णांक
integral part पूर्णांक भाग, अनुकल भाग
interchange व्यतिहरण, व्यतिहार
interpretation निर्वचन
inverse व्युत्क्रम
investigation अनुसंधान
involution घात क्रिया
irrational अपरिमेय
kind प्रकार
known ज्ञात
last term अंत पद
law नियम
laws of indices घातांक नियम
leading constituent अग्र संघटक
leading diagonal अग्र विकर्ण
left hand side वामपक्ष
like सजातीय, समरूप
limit सीमा
linear रैखीय, एकघात
linear equation रैखीय समीकार
logarithm छेदा
logarithmic series छेदा श्रेढी
magnitude महत्त्व

---

* The figure letter or expression जक showing the power घात of a quantity.

mantissa दशमिकांश *
mathematical induction गणितीय अनुमान
mean मध्यक
mean difference मध्यकान्तर
middle term मध्य पद
minor उपनिर्धारक **
minus वियुत
modulus मापांक
monomial एक पद
multiple अपवर्त्य (प्राचीन शब्द)
natural number प्राकृतिक संख्या
natural logarithm प्राकृतिक छेदा
negligible उपेक्ष्य, नगण्य
non recurring अनावर्ती
note आलोक, टिप्पणी
notation संकेतना
number संख्या
numerical संख्यात्मक
numerically संख्येने
observation अवलोकन
odd अयुग्म, विषम
order अनुक्रम, क्रम, वर्ग
pair युग्म
part घटक
partial product आंशिक गुणन फल
partly अंशतः
permutation क्रमचय
polynomial बहुपद
power घात
preceding पूर्वगामी
prismatic colours प्राक्षेत्रिय वर्ण
process विधी
progression श्रेढी
proof उपपत्ति
proper fraction एकघटक भिन्न
proportional अनुपाती
proposition साध्य
prove उपपादन करणे
quadratic वर्गीय, द्विघात
quadratic equation द्विघात समीकार
quadratic expression द्विघात पदसंहति
quadratic function द्विघात फित
quadratic surd द्विघात करणी

* decimal दशमिक part अंश of a logarithm hence दशमिकांश

** minor determinant

quantity राशि
quotient लब्धि, भागफल
radical मूल
radical sign मूल चिह्न
ratio निष्पत्ति
rational परिमेय
rationalisation परिमेयकरण
rationalise परिमेयकरण करणे
rationalising factor परिमेय कारक खण्ड
real वास्तविक
real part वास्तविक घटक
rearrangement पुनर्विन्यास
reciprocal व्युत्क्रम
reciprocal equation व्युत्क्रम समीकार
recurring decimal आवर्त दशमिक
reduction प्रह्रासन
reference अभ्युद्देश
repeat पुनरावृत्ति करणे
represent प्रतिनिधान करणे
required अपेक्षित, इष्ट
respectively क्रमश
rest विश्राम
restricted निबद्ध
restriction निबंध
reverse order उत्क्रम
right hand side दक्षिण पक्ष
root मूल
row पंक्ति
rule of cross mutiplication तिर्यग् गुणनाचा नियम
same order समवर्ग
satisfy समाधान करणे
selection प्रवरण
separately एकैकश
series श्रेढी
set कुलक
side पक्ष
signal संज्ञप्ति
significant सार्थक
similar समरूप
simplify सरल करणे
simultaneous equation युगपत समीकार
solution साधन
solve साधन करणे
square वर्ग करणे
stage प्रक्रम
standard प्रमाप
statement आवेदन
station स्थात्र (प्राचीन शब्द)
substitution आदेश
subtraction वियोग
succession पूर्वानुपरता
successive पूर्वानुपर
sufficient पर्याप्त
suffix पादाग्र
summation योगकरण

suppress निग्रहण करणे
surd करणी
symbol प्रतीक
symmetry संमिति
symmetrical equation संमितीय समीकार
symmetrical function संमितीय श्रित
table सारणी
tedious दीर्घसूत्री
telegraph apparatus दूरलिख साधित्र
tend to प्रवृत्त
term पद
theorem प्रमेय
transformation रूपान्तरण
transposition पक्षान्तरण
trinomial त्रिपद
type प्ररूप
unknown अज्ञात
unlike विजातीय
up to infinity यावदनन्त
value महा
vanish लोप होणे
variable चल
verification सत्यापन
verify सत्यापन करणे
very small अत्यल्प

## Notation

| | |
|---|---|
| $^nP_r$ | सक्रन |
| $^nC_r$ | सत्रन |
| $\lfloor n$ (factorial n) | $\lfloor स$ (हत स) |
| $\Sigma$ | य |
| e [base of natural logarithm] | घा [प्राकृतिक छेदाचा आधार] |
| i [$\sqrt{-1}$] | श [$\sqrt{-१}$] |
| Lt. $n \to \infty$ | सी $स \to \infty$ |
| $\omega$ (cube root of unity) | ओ (एकचें घन मूळ) |
| S (for sum) | यो [योग] |

# पारिभाषिक-शब्दावलि

## मराठी—आंग्ल

अंश numerator
अंशतः partly
अग्र त्रिकर्ण leading diagonal
अग्र संघटक leading constituent
अचल constant
अज्ञात unknown
अत्यल्प very small
अनन्त infinite
अनन्त श्रेढी infinite series
अनन्ती infinity
अनावर्त non recurring
अनुकल integral
अनुकल भाग integral part
अनुक्रम order
अनुगामी consecutive
अनुच्छेद article
अनुपाती proportional
अनुबद्ध conjugate
अनुबद्ध वर्ग करणी conjugate quadratic surd
अनुसंधान investigation
अन्त पद last term
अन्तर difference
अन्तर्धारण contain
अन्यथा aliter
अपरिमेय irrational
अपवर्त्य multiple
अपसार divergence
अपसारी divergent
अपेक्षित required
अभिधान करणे to denote
अभिवार brackets
अभिसार convergence
अभिसारी convergent
अभ्युद्देश reference
अयुग्म odd
अर्हा value
अवरोही descending
अवलोकन observation
अव्यक्त unknown
असंगत absurd
असमरूप unlike, dissimilar

असमेय incommensurable
असंमेयता incommensurability
असीम without limit
आदिय गुणनफल partial product
आदेश substitution
आरोही ascending
आलेक note
आवर्त दशांश recurring decimal
आवर्त होणे to recur
आवेदन statement
उत्क्रम reverse order
उपकल्पना hypothesis
उपनिश्चायक minor
उपपत्ति proof
उपपादन करणे prove
उपप्रमेय corrollary
उपेक्ष्य negligible
एकघात linear
एकपद monomial
एकान्तरत alternately
एकैकश separately
ऐक्यात्म्य identity
करणी surd
कल्पना assumption
काल्पनिक घटक imaginary part
काल्पनिक राशि imaginary quantity
कुलक set
क्रम order
क्रमचय permutation
क्रमश respectively
खण्ड factor
गणितीय अनुमान mathematical induction
गुणक coefficient
गुणोत्तर मध्यक geometric mean
गुणोत्तर श्रेढी geometrical progression
घटक part
घात power
घात क्रिया involution
घात समीकार exponential equation
घातांक नियम laws of Indices
घातांक श्रेढी exponential series
चल variable
छेद्य logarithm
छेद्य श्रेढी logarithmic series
तत्काल immediately
तदनुसार according as
तिर्यग् गुणनाचा नियम rule of cross multiplication

त्रिपद trinomial
दक्षिण पक्ष right hand side
दशमिक decimal
दशमिक भिन्न decimal fraction
दशमिकांश mantissa
दीर्घसूत्री tedious
दूरलिख साधित्र telegraph apparatus
द्विघात quadratic
द्विघात पदसहति quadratic expression
द्विघात श्रित quadratic function
द्विघात समीकार quadratic equation
द्विपद binomial
द्विपद गुणक binomial coefficient
द्विपद प्रमेय binomial theorem
द्विपद विस्तार binomial expansion
नगण्य negligible
नियद्ध restricted
निर्बंध restriction
निरसन elimination
निर्वचन interpretation
निवेश insertion
निश्चायक determinant
निष्पत्ति ratio

पक्ष side
पक्षान्तरण transposition
पंक्ति row
पद term
पदसहति expression
परतन्त्र dependent
परिगणन calculation
परिभाषा definition
परिमित राशि finite quantity
परिमेय rational
परिमेयकरण rationalisation
परिमेयकरण करणे rationalise
परिमेयकारक खण्ड rationalising factor
परिवर्तन change
परिशुद्धता accuracy
पर्याप्त sufficient
पादांक suffix
पुनरावृत्त repeated
पुनर्विन्यास rearrangement
पूर्वगामी preceding
पूर्णांक integral
पूर्वानुपर successive
पूर्वानुपरता succession
प्रक्रम stage
प्रचय common difference
प्रतिच्छेदा antilogrithm
प्रतिनिधान करणे to represent
प्रतिबंध condition

प्रतिबंधी समीकार conditional equation
प्रतिस्थापन replacement
प्रतीक symbol
प्रत्यक्ष गुणन direct multiplication
प्रमाप standard
प्रमेय theorem
प्ररूप type
प्रवरण selection
प्रवृत्त tend to
प्रह्रासन reduction
प्राकृतिक छेदा natural logarithm
प्राकृतिक संख्या natural number
प्रास dash
फल result
बहुपद *polynomial*
बीजीय algebraic
बोधात्मक instructive
भाजन करणे to divide
भाज्य *dividend*
भिन्न fraction
भिन्नीय fractional
मध्यक mean
मध्यकान्तर mean difference
मध्यपद middle term
महत्तम greatest
महत्ता magnitude
मापांक modulus
मूल root, radical
मूल क्रिया evolution
मूल चिह्न *radical sign*
मूलभूत fundamental
यष्टि yard
यावदनन्त up to infinity
युगपत समीकार simultaneous *equation*
युग्म even, pair
योग addition
योगकरण summation
योग करणे to sum
राशि quantity
रूपान्तरण transformation
रेखीय linear
रेखीय समीकार linear equation
लक्षण characteristic
लघ्वंश भिन्न *proper fraction*
लब्धि quotient
लोप करणे to cancel
लोप होणे vanish
वर्ग square
वर्गमूल निस्सारण extraction of a root
वर्गीकरण classification
वर्गीय quadratic
वर्ण order
वर्धन increase
वाम पक्ष left hand side

वास्तविक घटक real part
विकर्ण diagonal
विकल्प alternative
विजातीय unlike
विधा process
विन्यस्त करणे to arrange
विन्यास arrangement
वियुत minus
वियोग subtraction
विवेचक discriminant
व्यक्त करणे express
व्यंजक expression
व्यतिहरण interchange
व्यवस्थापन adjustment
व्युत्क्रम reciprocal
व्युत्क्रम समीकार reciprocal equation
शर arrow
शुद्ध correct
श्रित function
श्रेढी progression series
संवादी corresponding
संकर complex
संकर राशि complex quantity
संकलन addition
संकेतना notation
संख्या number
संख्येने numerically
संख्यात्मक numerical
संघटक constituent
संचय combination
संज्ञप्ति signal
सत्यापन verification
सत्यापन करणे verify
समता equality
समदूर equidistant
समवर्ण same order
समाधान करणे to satisfy
समान घात homogeneous
समानघात समीकार homogeneous equation
समानघात श्रित homogeneous function
समान्तर मध्यक arithmetic mean
समान्तर श्रेढी arithmetical progression
समान्तर गुणोत्तर श्रेढी arithmetico geometric progression
समापवर्तक common factor
समार्ह equivalent
समिति committee
समीकरण equate
समीकार equation
समूह group
संपूरक complementary
संमिति symmetry
संमितीय symmetrical
संमितीय श्रित symmetrical function

संमितीय समीकार symmetrical equation
संमेय commensurable
सरल करणे to simplify
सर्वांगसम identical
सहगुणक cofactor
सांक्षेत्रिक वर्ण prismatic colours
साधन solution
साधन करणे to solve
साधारण निष्पत्ति common ratio
साध्य proposition
सान्त श्रेढी finite series
सामान्यत: generally
सामान्य पद general term
सामान्य पद्धति common system
सारणी table
सार्थक significant
सीमा limit
सीमान्ती in the limit
सीमेत in the limit
सुतथ्यत: exactly, exactness
सूत्र formula
स्तम्भ column
स्तम्भानुसार columnwise
स्वतन्त्र independent
हत factorial
हर denominator
हरात्मक मध्यक harmonic mean
हरात्मक श्रेढी harmonical progression

# छेदा-प्रतिछेदा-सारणी

छेद्य-सारणी ( logarithmic tables )

| | ० | १ | २ | ३ | ४ | ५ | ६ | ७ | ८ | ९ | १ २ ३ | ४ ५ ६ | ७ ८ ९ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ५० | ६९९० | ६९९८ | ७००७ | ७०१६ | ७०२४ | ७०३३ | ७०४२ | ७०५० | ७०५९ | ७०६७ | १ २ ३ | ३ ४ ५ | ६ ७ ८ |
| ५१ | ७०७६ | ७०८४ | ७०९३ | ७१०१ | ७११० | ७११८ | ७१२६ | ७१३५ | ७१४३ | ७१५२ | १ २ ३ | ३ ४ ५ | ६ ७ ८ |
| ५२ | ७१६० | ७१६८ | ७१७७ | ७१८५ | ७१९३ | ७२०२ | ७२१० | ७२१८ | ७२२६ | ७२३५ | १ २ २ | ३ ४ ५ | ६ ७ ७ |
| ५३ | ७२४३ | ७२५१ | ७२५९ | ७२६७ | ७२७५ | ७२८४ | ७२९२ | ७३०० | ७३०८ | ७३१६ | १ २ २ | ३ ४ ५ | ६ ६ ७ |
| ५४ | ७३२४ | ७३३२ | ७३४० | ७३४८ | ७३५६ | ७३६४ | ७३७२ | ७३८० | ७३८८ | ७३९६ | १ २ २ | ३ ४ ५ | ६ ६ ७ |
| ५५ | ७४०४ | ७४१२ | ७४१९ | ७४२७ | ७४३५ | ७४४३ | ७४५१ | ७४५९ | ७४६६ | ७४७४ | १ २ २ | ३ ४ ५ | ५ ६ ७ |
| ५६ | ७४८२ | ७४९० | ७४९७ | ७५०५ | ७५१३ | ७५२० | ७५२८ | ७५३६ | ७५४३ | ७५५१ | १ २ २ | ३ ४ ५ | ५ ६ ७ |
| ५७ | ७५५९ | ७५६६ | ७५७४ | ७५८२ | ७५८९ | ७५९७ | ७६०४ | ७६१२ | ७६१९ | ७६२७ | १ २ २ | ३ ४ ५ | ५ ६ ७ |
| ५८ | ७६३४ | ७६४२ | ७६४९ | ७६५७ | ७६६४ | ७६७२ | ७६७९ | ७६८६ | ७६९४ | ७७०१ | १ १ २ | ३ ४ ४ | ५ ६ ७ |
| ५९ | ७७०९ | ७७१६ | ७७२३ | ७७३१ | ७७३८ | ७७४५ | ७७५२ | ७७६० | ७७६७ | ७७७४ | १ १ २ | ३ ४ ४ | ५ ६ ७ |
| ६० | ७७८२ | ७७८९ | ७७९६ | ७८०३ | ७८१० | ७८१८ | ७८२५ | ७८३२ | ७८३९ | ७८४६ | १ १ २ | ३ ४ ४ | ५ ६ ६ |
| ६१ | ७८५३ | ७८६० | ७८६८ | ७८७५ | ७८८२ | ७८८९ | ७८९६ | ७९०३ | ७९१० | ७९१७ | १ १ २ | ३ ४ ४ | ५ ६ ६ |
| ६२ | ७९२४ | ७९३१ | ७९३८ | ७९४५ | ७९५२ | ७९५९ | ७९६६ | ७९७३ | ७९८० | ७९८७ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ५ ६ ६ |
| ६३ | ७९९३ | ८००० | ८००७ | ८०१४ | ८०२१ | ८०२८ | ८०३५ | ८०४१ | ८०४८ | ८०५५ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ५ ५ ६ |
| ६४ | ८०६२ | ८०६९ | ८०७५ | ८०८२ | ८०८९ | ८०९६ | ८१०२ | ८१०९ | ८११६ | ८१२२ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ५ ५ ६ |
| ६५ | ८१२९ | ८१३६ | ८१४२ | ८१४९ | ८१५६ | ८१६२ | ८१६९ | ८१७६ | ८१८२ | ८१८९ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ५ ५ ६ |
| ६६ | ८१९५ | ८२०२ | ८२०९ | ८२१५ | ८२२२ | ८२२८ | ८२३५ | ८२४१ | ८२४८ | ८२५४ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ५ ५ ६ |
| ६७ | ८२६१ | ८२६७ | ८२७४ | ८२८० | ८२८७ | ८२९३ | ८२९९ | ८३०६ | ८३१२ | ८३१९ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ५ ५ ६ |
| ६८ | ८३२५ | ८३३१ | ८३३८ | ८३४४ | ८३५१ | ८३५७ | ८३६३ | ८३७० | ८३७६ | ८३८२ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ४ ५ ६ |
| ६९ | ८३८८ | ८३९५ | ८४०१ | ८४०७ | ८४१४ | ८४२० | ८४२६ | ८४३२ | ८४३९ | ८४४५ | १ १ २ | २ ३ ४ | ४ ५ ६ |
| ७० | ८४५१ | ८४५७ | ८४६३ | ८४७० | ८४७६ | ८४८२ | ८४८८ | ८४९४ | ८५०० | ८५०६ | १ १ २ | २ ३ ४ | ४ ५ ६ |
| ७१ | ८५१३ | ८५१९ | ८५२५ | ८५३१ | ८५३७ | ८५४३ | ८५४९ | ८५५५ | ८५६१ | ८५६७ | १ १ २ | २ ३ ४ | ४ ५ ५ |
| ७२ | ८५७३ | ८५७९ | ८५८५ | ८५९१ | ८५९७ | ८६०३ | ८६०९ | ८६१५ | ८६२१ | ८६२७ | १ १ २ | २ ३ ४ | ४ ५ ५ |
| ७३ | ८६३३ | ८६३९ | ८६४५ | ८६५१ | ८६५७ | ८६६३ | ८६६९ | ८६७५ | ८६८१ | ८६८६ | १ १ २ | २ ३ ४ | ४ ५ ५ |
| ७४ | ८६९२ | ८६९८ | ८७०४ | ८७१० | ८७१६ | ८७२२ | ८७२७ | ८७३३ | ८७३९ | ८७४५ | १ १ २ | २ ३ ४ | ४ ५ ५ |

| | ૦ | ૧ | ૨ | ૩ | ૪ | ૫ | ૬ | ૭ | ૮ | ૯ | ૧ ૨ ૩ | ૪ ૫ ૬ | ૭ ૮ ૯ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ૭૫ | ૮૭૫૧ | ૮૭૫૬ | ૮૭૬૨ | ૮૭૬૮ | ૮૭૭૪ | ૮૭૭૯ | ૮૭૮૫ | ૮૭૯૧ | ૮૭૯૭ | ૮૮૦૨ | ૧ ૧ ૨ | ૨ ૩ ૩ | ૪ ૫ ૫ |
| ૭૬ | ૮૮૦૮ | ૮૮૧૪ | ૮૮૨૦ | ૮૮૨૫ | ૮૮૩૧ | ૮૮૩૭ | ૮૮૪૨ | ૮૮૪૮ | ૮૮૫૪ | ૮૮૫૯ | ૧ ૧ ૨ | ૨ ૩ ૩ | ૪ ૫ ૫ |
| ૭૭ | ૮૮૬૫ | ૮૮૭૧ | ૮૮૭૬ | ૮૮૮૨ | ૮૮૮૭ | ૮૮૯૩ | ૮૮૯૯ | ૮૯૦૪ | ૮૯૧૦ | ૮૯૧૫ | ૧ ૧ ૨ | ૨ ૩ ૩ | ૪ ૪ ૫ |
| ૭૮ | ૮૯૨૧ | ૮૯૨૭ | ૮૯૩૨ | ૮૯૩૮ | ૮૯૪૩ | ૮૯૪૯ | ૮૯૫૪ | ૮૯૬૦ | ૮૯૬૫ | ૮૯૭૧ | ૧ ૧ ૨ | ૨ ૩ ૩ | ૪ ૪ ૫ |
| ૭૯ | ૮૯૭૬ | ૮૯૮૨ | ૮૯૮૭ | ૮૯૯૩ | ૮૯૯૮ | ૯૦૦૪ | ૯૦૦૯ | ૯૦૧૫ | ૯૦૨૦ | ૯૦૨૫ | ૧ ૧ ૨ | ૨ ૩ ૩ | ૪ ૪ ૫ |
| ૮૦ | ૯૦૩૧ | ૯૦૩૬ | ૯૦૪૨ | ૯૦૪૭ | ૯૦૫૩ | ૯૦૫૮ | ૯૦૬૩ | ૯૦૬૯ | ૯૦૭૪ | ૯૦૭૯ | ૧ ૧ ૨ | ૨ ૩ ૩ | ૪ ૪ ૫ |
| ૮૧ | ૯૦૮૫ | ૯૦૯૦ | ૯૦૯૬ | ૯૧૦૧ | ૯૧૦૬ | ૯૧૧૨ | ૯૧૧૭ | ૯૧૨૨ | ૯૧૨૮ | ૯૧૩૩ | ૧ ૧ ૨ | ૨ ૩ ૩ | ૪ ૪ ૫ |
| ૮૨ | ૯૧૩૮ | ૯૧૪૩ | ૯૧૪૯ | ૯૧૫૪ | ૯૧૫૯ | ૯૧૬૫ | ૯૧૭૦ | ૯૧૭૫ | ૯૧૮૦ | ૯૧૮૬ | ૧ ૧ ૨ | ૨ ૩ ૩ | ૪ ૪ ૫ |
| ૮૩ | ૯૧૯૧ | ૯૧૯૬ | ૯૨૦૧ | ૯૨૦૬ | ૯૨૧૨ | ૯૨૧૭ | ૯૨૨૨ | ૯૨૨૭ | ૯૨૩૨ | ૯૨૩૮ | ૧ ૧ ૨ | ૨ ૩ ૩ | ૪ ૪ ૫ |
| ૮૪ | ૯૨૪૩ | ૯૨૪૮ | ૯૨૫૩ | ૯૨૫૮ | ૯૨૬૩ | ૯૨૬૯ | ૯૨૭૪ | ૯૨૭૯ | ૯૨૮૪ | ૯૨૮૯ | ૧ ૧ ૨ | ૨ ૩ ૩ | ૪ ૪ ૫ |
| ૮૫ | ૯૨૯૪ | ૯૨૯૯ | ૯૩૦૪ | ૯૩૦૯ | ૯૩૧૫ | ૯૩૨૦ | ૯૩૨૫ | ૯૩૩૦ | ૯૩૩૫ | ૯૩૪૦ | ૧ ૧ ૨ | ૨ ૩ ૩ | ૪ ૪ ૫ |
| ૮૬ | ૯૩૪૫ | ૯૩૫૦ | ૯૩૫૫ | ૯૩૬૦ | ૯૩૬૫ | ૯૩૭૦ | ૯૩૭૫ | ૯૩૮૦ | ૯૩૮૫ | ૯૩૯૦ | ૧ ૧ ૨ | ૨ ૩ ૩ | ૪ ૪ ૫ |
| ૮૭ | ૯૩૯૫ | ૯૪૦૦ | ૯૪૦૫ | ૯૪૧૦ | ૯૪૧૫ | ૯૪૨૦ | ૯૪૨૫ | ૯૪૩૦ | ૯૪૩૫ | ૯૪૪૦ | ૦ ૧ ૧ | ૨ ૨ ૩ | ૩ ૪ ૪ |
| ૮૮ | ૯૪૪૫ | ૯૪૫૦ | ૯૪૫૫ | ૯૪૬૦ | ૯૪૬૫ | ૯૪૬૯ | ૯૪૭૪ | ૯૪૭૯ | ૯૪૮૪ | ૯૪૮૯ | ૦ ૧ ૧ | ૨ ૨ ૩ | ૩ ૪ ૪ |
| ૮૯ | ૯૪૯૪ | ૯૪૯૯ | ૯૫૦૪ | ૯૫૦૯ | ૯૫૧૩ | ૯૫૧૮ | ૯૫૨૩ | ૯૫૨૮ | ૯૫૩૩ | ૯૫૩૮ | ૦ ૧ ૧ | ૨ ૨ ૩ | ૩ ૪ ૪ |
| ૯૦ | ૯૫૪૨ | ૯૫૪૭ | ૯૫૫૨ | ૯૫૫૭ | ૯૫૬૨ | ૯૫૬૬ | ૯૫૭૧ | ૯૫૭૬ | ૯૫૮૧ | ૯૫૮૬ | ૦ ૧ ૧ | ૨ ૨ ૩ | ૩ ૪ ૪ |
| ૯૧ | ૯૫૯૦ | ૯૫૯૫ | ૯૬૦૦ | ૯૬૦૫ | ૯૬૦૯ | ૯૬૧૪ | ૯૬૧૯ | ૯૬૨૪ | ૯૬૨૮ | ૯૬૩૩ | ૦ ૧ ૧ | ૨ ૨ ૩ | ૩ ૪ ૪ |
| ૯૨ | ૯૬૩૮ | ૯૬૪૩ | ૯૬૪૭ | ૯૬૫૨ | ૯૬૫૭ | ૯૬૬૧ | ૯૬૬૬ | ૯૬૭૧ | ૯૬૭૫ | ૯૬૮૦ | ૦ ૧ ૧ | ૨ ૨ ૩ | ૩ ૪ ૪ |
| ૯૩ | ૯૬૮૫ | ૯૬૮૯ | ૯૬૯૪ | ૯૬૯૯ | ૯૭૦૩ | ૯૭૦૮ | ૯૭૧૩ | ૯૭૧૭ | ૯૭૨૨ | ૯૭૨૭ | ૦ ૧ ૧ | ૨ ૨ ૩ | ૩ ૪ ૪ |
| ૯૪ | ૯૭૩૧ | ૯૭૩૬ | ૯૭૪૧ | ૯૭૪૫ | ૯૭૫૦ | ૯૭૫૪ | ૯૭૫૯ | ૯૭૬૩ | ૯૭૬૮ | ૯૭૭૩ | ૦ ૧ ૧ | ૨ ૨ ૩ | ૩ ૪ ૪ |
| ૯૫ | ૯૭૭૭ | ૯૭૮૨ | ૯૭૮૬ | ૯૭૯૧ | ૯૭૯૫ | ૯૮૦૦ | ૯૮૦૫ | ૯૮૦૯ | ૯૮૧૪ | ૯૮૧૮ | ૦ ૧ ૧ | ૨ ૨ ૩ | ૩ ૪ ૪ |
| ૯૬ | ૯૮૨૩ | ૯૮૨૭ | ૯૮૩૨ | ૯૮૩૬ | ૯૮૪૧ | ૯૮૪૫ | ૯૮૫૦ | ૯૮૫૪ | ૯૮૫૯ | ૯૮૬૩ | ૦ ૧ ૧ | ૨ ૨ ૩ | ૩ ૪ ૪ |
| ૯૭ | ૯૮૬૮ | ૯૮૭૨ | ૯૮૭૭ | ૯૮૮૧ | ૯૮૮૬ | ૯૮૯૦ | ૯૮૯૪ | ૯૮૯૯ | ૯૯૦૩ | ૯૯૦૮ | ૦ ૧ ૧ | ૨ ૨ ૩ | ૩ ૪ ૪ |
| ૯૮ | ૯૯૧૨ | ૯૯૧૭ | ૯૯૨૧ | ૯૯૨૬ | ૯૯૩૦ | ૯૯૩૪ | ૯૯૩૯ | ૯૯૪૩ | ૯૯૪૮ | ૯૯૫૨ | ૦ ૧ ૧ | ૨ ૨ ૩ | ૩ ૪ ૪ |
| ૯૯ | ૯૯૫૬ | ૯૯૬૧ | ૯૯૬૫ | ૯૯૬૯ | ૯૯૭૪ | ૯૯૭૮ | ૯૯૮૩ | ૯૯૮૭ | ૯૯૯૧ | ૯૯૯૬ | ૦ ૧ ૧ | ૨ ૨ ૩ | ૩ ૩ ૪ |

## प्रतिलेघ सारणी (antilogarithmic tables)

| | ० | १ | २ | ३ | ४ | ५ | ६ | ७ | ८ | ९ | १ २ ३ | ४ ५ ६ | ७ ८ ९ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ·०० | १००० | १००२ | १००५ | १००७ | १००९ | १०१२ | १०१४ | १०१६ | १०१९ | १०२१ | ० ० १ | १ १ १ | २ २ २ |
| ·०१ | १०२३ | १०२६ | १०२८ | १०३० | १०३३ | १०३५ | १०३८ | १०४० | १०४२ | १०४५ | ० ० १ | १ १ १ | २ २ २ |
| ·०२ | १०४७ | १०५० | १०५२ | १०५४ | १०५७ | १०५९ | १०६२ | १०६४ | १०६७ | १०६९ | ० ० १ | १ १ १ | २ २ २ |
| ·०३ | १०७२ | १०७४ | १०७६ | १०७९ | १०८१ | १०८४ | १०८६ | १०८९ | १०९१ | १०९४ | ० ० १ | १ १ १ | २ २ २ |
| ·०४ | १०९६ | १०९९ | ११०२ | ११०४ | ११०७ | ११०९ | १११२ | १११४ | १११७ | १११९ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ २ |
| ·०५ | ११२२ | ११२५ | ११२७ | ११३० | ११३२ | ११३५ | ११३८ | ११४० | ११४३ | ११४६ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ २ |
| ·०६ | ११४८ | ११५१ | ११५३ | ११५६ | ११५९ | ११६१ | ११६४ | ११६७ | ११६९ | ११७२ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ २ |
| ·०७ | ११७५ | ११७८ | ११८० | ११८३ | ११८६ | ११८९ | ११९१ | ११९४ | ११९७ | ११९९ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ २ |
| ·०८ | १२०२ | १२०५ | १२०८ | १२११ | १२१३ | १२१६ | १२१९ | १२२२ | १२२५ | १२२७ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ ३ |
| ·०९ | १२३० | १२३३ | १२३६ | १२३९ | १२४२ | १२४५ | १२४७ | १२५० | १२५३ | १२५६ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ ३ |
| ·१० | १२५९ | १२६२ | १२६५ | १२६८ | १२७१ | १२७४ | १२७६ | १२७९ | १२८२ | १२८५ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ ३ |
| ·११ | १२८८ | १२९१ | १२९४ | १२९७ | १३०० | १३०३ | १३०६ | १३०९ | १३१२ | १३१५ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ ३ |
| ·१२ | १३१८ | १३२१ | १३२४ | १३२७ | १३३० | १३३४ | १३३७ | १३४० | १३४३ | १३४६ | ० १ १ | १ २ २ | २ २ ३ |
| ·१३ | १३४९ | १३५२ | १३५५ | १३५८ | १३६१ | १३६५ | १३६८ | १३७१ | १३७४ | १३७७ | ० १ १ | १ २ २ | २ ३ ३ |
| ·१४ | १३८० | १३८४ | १३८७ | १३९० | १३९३ | १३९६ | १४०० | १४०३ | १४०६ | १४०९ | ० १ १ | १ २ २ | २ ३ ३ |
| ·१५ | १४१३ | १४१६ | १४१९ | १४२२ | १४२६ | १४२९ | १४३२ | १४३५ | १४३९ | १४४२ | ० १ १ | १ २ २ | २ ३ ३ |
| ·१६ | १४४५ | १४४९ | १४५२ | १४५५ | १४५९ | १४६२ | १४६६ | १४६९ | १४७२ | १४७६ | ० १ १ | १ २ २ | २ ३ ३ |
| ·१७ | १४७९ | १४८३ | १४८६ | १४८९ | १४९३ | १४९६ | १५०० | १५०३ | १५०७ | १५१० | ० १ १ | १ २ २ | २ ३ ३ |
| ·१८ | १५१४ | १५१७ | १५२१ | १५२४ | १५२८ | १५३१ | १५३५ | १५३८ | १५४२ | १५४५ | ० १ १ | १ २ २ | २ ३ ३ |
| ·१९ | १५४९ | १५५२ | १५५६ | १५६० | १५६३ | १५६७ | १५७० | १५७४ | १५७८ | १५८१ | ० १ १ | १ २ २ | ३ ३ ३ |
| ·२० | १५८५ | १५८९ | १५९२ | १५९६ | १६०० | १६०३ | १६०७ | १६११ | १६१४ | १६१८ | ० १ १ | १ २ २ | ३ ३ ३ |
| ·२१ | १६२२ | १६२६ | १६२९ | १६३३ | १६३७ | १६४१ | १६४४ | १६४८ | १६५२ | १६५६ | ० १ १ | २ २ २ | ३ ३ ३ |
| ·२२ | १६६० | १६६३ | १६६७ | १६७१ | १६७५ | १६७९ | १६८३ | १६८७ | १६९० | १६९४ | ० १ १ | २ २ २ | ३ ३ ३ |
| ·२३ | १६९८ | १७०२ | १७०६ | १७१० | १७१४ | १७१८ | १७२२ | १७२६ | १७३० | १७३४ | ० १ १ | २ २ २ | ३ ३ ४ |
| ·२४ | १७३८ | १७४२ | १७४६ | १७५० | १७५४ | १७५८ | १७६२ | १७६६ | १७७० | १७७४ | ० १ १ | २ २ २ | ३ ३ ४ |

| | ० | १ | २ | ३ | ४ | ५ | ६ | ७ | ८ | ९ | १२३ | ४५६ | ७८९ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .२५ | १७७८ | १७८२ | १७८६ | १७९१ | १७९५ | १७९९ | १८०३ | १८०७ | १८११ | १८१६ | ० १ १ | २ २ २ | ३ ३ ४ |
| .२६ | १८२० | १८२४ | १८२८ | १८३२ | १८३७ | १८४१ | १८४५ | १८४९ | १८५४ | १८५८ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ३ ४ |
| .२७ | १८६२ | १८६६ | १८७१ | १८७५ | १८७९ | १८८४ | १८८८ | १८९२ | १८९७ | १९०१ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ३ ४ |
| .२८ | १९०५ | १९१० | १९१४ | १९१९ | १९२३ | १९२८ | १९३२ | १९३६ | १९४१ | १९४५ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ४ ४ |
| .२९ | १९५० | १९५४ | १९५९ | १९६३ | १९६८ | १९७२ | १९७७ | १९८२ | १९८६ | १९९१ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ४ ४ |
| .३० | १९९५ | २००० | २००४ | २००९ | २०१४ | २०१८ | २०२३ | २०२८ | २०३२ | २०३७ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ४ ४ |
| .३१ | २०४२ | २०४६ | २०५१ | २०५६ | २०६१ | २०६५ | २०७० | २०७५ | २०८० | २०८४ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ४ ४ |
| .३२ | २०८९ | २०९४ | २०९९ | २१०४ | २१०९ | २११३ | २११८ | २१२३ | २१२८ | २१३३ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ४ ४ |
| .३३ | २१३८ | २१४३ | २१४८ | २१५३ | २१५८ | २१६३ | २१६८ | २१७३ | २१७८ | २१८३ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ४ ४ |
| .३४ | २१८८ | २१९३ | २१९८ | २२०३ | २२०८ | २२१३ | २२१८ | २२२३ | २२२८ | २२३४ | १ १ २ | २ ३ ३ | ४ ४ ५ |
| .३५ | २२३९ | २२४४ | २२४९ | २२५४ | २२५९ | २२६५ | २२७० | २२७५ | २२८० | २२८६ | १ १ २ | २ ३ ३ | ४ ४ ५ |
| .३६ | २२९१ | २२९६ | २३०१ | २३०७ | २३१२ | २३१७ | २३२३ | २३२८ | २३३३ | २३३९ | १ १ २ | २ ३ ३ | ४ ४ ५ |
| .३७ | २३४४ | २३५० | २३५५ | २३६० | २३६६ | २३७१ | २३७७ | २३८२ | २३८८ | २३९३ | १ १ २ | २ ३ ३ | ४ ४ ५ |
| .३८ | २३९९ | २४०४ | २४१० | २४१५ | २४२१ | २४२७ | २४३२ | २४३८ | २४४३ | २४४९ | १ १ २ | २ ३ ३ | ४ ४ ५ |
| .३९ | २४५५ | २४६० | २४६६ | २४७२ | २४७७ | २४८३ | २४८९ | २४९५ | २५०० | २५०६ | १ १ २ | २ ३ ३ | ४ ५ ५ |
| .४० | २५१२ | २५१८ | २५२३ | २५२९ | २५३५ | २५४१ | २५४७ | २५५३ | २५५९ | २५६४ | १ १ २ | २ ३ ४ | ४ ५ ५ |
| .४१ | २५७० | २५७६ | २५८२ | २५८८ | २५९४ | २६०० | २६०६ | २६१२ | २६१८ | २६२४ | १ १ २ | २ ३ ४ | ४ ५ ५ |
| .४२ | २६३० | २६३६ | २६४२ | २६४९ | २६५५ | २६६१ | २६६७ | २६७३ | २६७९ | २६८५ | १ १ २ | २ ३ ४ | ४ ५ ६ |
| .४३ | २६९२ | २६९८ | २७०४ | २७१० | २७१६ | २७२३ | २७२९ | २७३५ | २७४२ | २७४८ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ४ ५ ६ |
| .४४ | २७५४ | २७६१ | २७६७ | २७७३ | २७८० | २७८६ | २७९३ | २७९९ | २८०५ | २८१२ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ४ ५ ६ |
| .४५ | २८१८ | २८२५ | २८३१ | २८३८ | २८४४ | २८५१ | २८५८ | २८६४ | २८७१ | २८७७ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ५ ५ ६ |
| .४६ | २८८४ | २८९१ | २८९७ | २९०४ | २९११ | २९१७ | २९२४ | २९३१ | २९३८ | २९४४ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ५ ५ ६ |
| .४७ | २९५१ | २९५८ | २९६५ | २९७२ | २९७९ | २९८५ | २९९२ | २९९९ | ३००६ | ३०१३ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ५ ५ ६ |
| .४८ | ३०२० | ३०२७ | ३०३४ | ३०४१ | ३०४८ | ३०५५ | ३०६२ | ३०६९ | ३०७६ | ३०८३ | १ १ २ | ३ ४ ४ | ५ ६ ६ |
| .४९ | ३०९० | ३०९७ | ३१०५ | ३११२ | ३११९ | ३१२६ | ३१३३ | ३१४१ | ३१४८ | ३१५५ | १ १ २ | ३ ४ ४ | ५ ६ ६ |

प्रतिछेद्य-सारणी (antilogarithmic tables)

| | ० | १ | २ | ३ | ४ | ५ | ६ | ७ | ८ | ९ | १ २ ३ | ४ ५ ६ | ७ ८ ९ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ·०० | १००० | १००२ | १००५ | १००७ | १००९ | १०१२ | १०१४ | १०१६ | १०१९ | १०२१ | ० ० १ | १ १ १ | २ २ २ |
| ·०१ | १०२३ | १०२६ | १०२८ | १०३० | १०३३ | १०३५ | १०३८ | १०४० | १०४२ | १०४५ | ० ० १ | १ १ १ | २ २ २ |
| ·०२ | १०४७ | १०५० | १०५२ | १०५४ | १०५७ | १०५९ | १०६२ | १०६४ | १०६७ | १०६९ | ० ० १ | १ १ १ | २ २ २ |
| ·०३ | १०७२ | १०७४ | १०७६ | १०७९ | १०८१ | १०८४ | १०८६ | १०८९ | १०९१ | १०९४ | ० ० १ | १ १ १ | २ २ २ |
| ·०४ | १०९६ | १०९९ | ११०२ | ११०४ | ११०७ | ११०९ | १११२ | १११४ | १११७ | १११९ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ २ |
| ·०५ | ११२२ | ११२५ | ११२७ | ११३० | ११३२ | ११३५ | ११३८ | ११४० | ११४३ | ११४६ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ २ |
| ·०६ | ११४८ | ११५१ | ११५३ | ११५६ | ११५९ | ११६१ | ११६४ | ११६७ | ११६९ | ११७२ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ २ |
| ·०७ | ११७५ | ११७८ | ११८० | ११८३ | ११८६ | ११८९ | ११९१ | ११९४ | ११९७ | ११९९ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ २ |
| ·०८ | १२०२ | १२०५ | १२०८ | १२११ | १२१३ | १२१६ | १२१९ | १२२२ | १२२५ | १२२७ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ ३ |
| ·०९ | १२३० | १२३३ | १२३६ | १२३९ | १२४२ | १२४५ | १२४७ | १२५० | १२५३ | १२५६ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ ३ |
| ·१० | १२५९ | १२६२ | १२६५ | १२६८ | १२७१ | १२७४ | १२७६ | १२७९ | १२८२ | १२८५ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ ३ |
| ·११ | १२८८ | १२९१ | १२९४ | १२९७ | १३०० | १३०३ | १३०६ | १३०९ | १३१२ | १३१५ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ ३ |
| ·१२ | १३१८ | १३२१ | १३२४ | १३२७ | १३३० | १३३४ | १३३७ | १३४० | १३४३ | १३४६ | ० १ १ | १ २ २ | २ २ ३ |
| ·१३ | १३४९ | १३५२ | १३५५ | १३५८ | १३६१ | १३६५ | १३६८ | १३७१ | १३७४ | १३७७ | ० १ १ | १ २ २ | २ ३ ३ |
| ·१४ | १३८० | १३८४ | १३८७ | १३९० | १३९३ | १३९६ | १४०० | १४०३ | १४०६ | १४०९ | ० १ १ | १ २ २ | २ ३ ३ |
| ·१५ | १४१३ | १४१६ | १४१९ | १४२२ | १४२६ | १४२९ | १४३२ | १४३५ | १४३९ | १४४२ | ० १ १ | १ २ २ | २ ३ ३ |
| ·१६ | १४४५ | १४४९ | १४५२ | १४५५ | १४५९ | १४६२ | १४६६ | १४६९ | १४७२ | १४७६ | ० १ १ | १ २ २ | २ ३ ३ |
| ·१७ | १४७९ | १४८३ | १४८६ | १४८९ | १४९३ | १४९६ | १५०० | १५०३ | १५०७ | १५१० | ० १ १ | १ २ २ | २ ३ ३ |
| ·१८ | १५१४ | १५१७ | १५२१ | १५२४ | १५२८ | १५३१ | १५३५ | १५३८ | १५४२ | १५४५ | ० १ १ | १ २ २ | २ ३ ३ |
| ·१९ | १५४९ | १५५२ | १५५६ | १५६० | १५६३ | १५६७ | १५७० | १५७४ | १५७८ | १५८१ | ० १ १ | १ २ २ | ३ ३ ३ |
| ·२० | १५८५ | १५८९ | १५९२ | १५९६ | १६०० | १६०३ | १६०७ | १६११ | १६१४ | १६१८ | ० १ १ | १ २ २ | ३ ३ ३ |
| ·२१ | १६२२ | १६२६ | १६२९ | १६३३ | १६३७ | १६४१ | १६४४ | १६४८ | १६५२ | १६५६ | ० १ १ | २ २ २ | ३ ३ ३ |
| ·२२ | १६६० | १६६३ | १६६७ | १६७१ | १६७५ | १६७९ | १६८३ | १६८७ | १६९० | १६९४ | ० १ १ | २ २ २ | ३ ३ ३ |
| ·२३ | १६९८ | १७०२ | १७०६ | १७१० | १७१४ | १७१८ | १७२२ | १७२६ | १७३० | १७३४ | ० १ १ | २ २ २ | ३ ३ ४ |
| ·२४ | १७३८ | १७४२ | १७४६ | १७५० | १७५४ | १७५८ | १७६२ | १७६६ | १७७० | १७७४ | ० १ १ | २ २ २ | ३ ३ ४ |

| | ० | १ | २ | ३ | ४ | ५ | ६ | ७ | ८ | ९ | १२३ | ४५६ | ७८९ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ·२५ | १७७८ | १७८२ | १७८६ | १७९१ | १७९५ | १७९९ | १८०३ | १८०७ | १८११ | १८१६ | ० १ १ | २ २ २ | ३ ३ ४ |
| ·२६ | १८२० | १८२४ | १८२८ | १८३२ | १८३७ | १८४१ | १८४५ | १८४९ | १८५४ | १८५८ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ३ ४ |
| ·२७ | १८६२ | १८६६ | १८७१ | १८७५ | १८७९ | १८८४ | १८८८ | १८९२ | १८९७ | १९०१ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ३ ४ |
| ·२८ | १९०५ | १९१० | १९१४ | १९१९ | १९२३ | १९२८ | १९३२ | १९३६ | १९४१ | १९४५ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ४ ४ |
| ·२९ | १९५० | १९५४ | १९५९ | १९६३ | १९६८ | १९७२ | १९७७ | १९८२ | १९८६ | १९९१ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ४ ४ |
| ·३० | १९९५ | २००० | २००४ | २००९ | २०१४ | २०१८ | २०२३ | २०२८ | २०३२ | २०३७ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ४ ४ |
| ·३१ | २०४२ | २०४६ | २०५१ | २०५६ | २०६१ | २०६५ | २०७० | २०७५ | २०८० | २०८४ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ४ ४ |
| ·३२ | २०८९ | २०९४ | २०९९ | २१०४ | २१०९ | २११३ | २११८ | २१२३ | २१२८ | २१३३ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ४ ४ |
| ·३३ | २१३८ | २१४३ | २१४८ | २१५३ | २१५८ | २१६३ | २१६८ | २१७३ | २१७८ | २१८३ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ४ ४ |
| ·३४ | २१८८ | २१९३ | २१९८ | २२०३ | २२०८ | २२१३ | २२१८ | २२२३ | २२२८ | २२३४ | १ १ २ | २ ३ ३ | ४ ४ ५ |
| ·३५ | २२३९ | २२४४ | २२४९ | २२५४ | २२५९ | २२६५ | २२७० | २२७५ | २२८० | २२८६ | १ १ २ | २ ३ ३ | ४ ४ ५ |
| ·३६ | २२९१ | २२९६ | २३०१ | २३०७ | २३१२ | २३१७ | २३२३ | २३२८ | २३३३ | २३३९ | १ १ २ | २ ३ ३ | ४ ४ ५ |
| ·३७ | २३४४ | २३५० | २३५५ | २३६० | २३६६ | २३७१ | २३७७ | २३८२ | २३८८ | २३९३ | १ १ २ | २ ३ ३ | ४ ४ ५ |
| ·३८ | २३९९ | २४०४ | २४१० | २४१५ | २४२१ | २४२७ | २४३२ | २४३८ | २४४३ | २४४९ | १ १ २ | २ ३ ३ | ४ ४ ५ |
| ·३९ | २४५५ | २४६० | २४६६ | २४७२ | २४७७ | २४८३ | २४८९ | २४९५ | २५०० | २५०६ | १ १ २ | २ ३ ३ | ४ ५ ५ |
| ·४० | २५१२ | २५१८ | २५२३ | २५२९ | २५३५ | २५४१ | २५४७ | २५५३ | २५५९ | २५६४ | १ १ २ | २ ३ ४ | ४ ५ ५ |
| ·४१ | २५७० | २५७६ | २५८२ | २५८८ | २५९४ | २६०० | २६०६ | २६१२ | २६१८ | २६२४ | १ १ २ | २ ३ ४ | ४ ५ ५ |
| ·४२ | २६३० | २६३६ | २६४२ | २६४९ | २६५५ | २६६१ | २६६७ | २६७३ | २६७९ | २६८५ | १ १ २ | २ ३ ४ | ४ ५ ६ |
| ·४३ | २६९२ | २६९८ | २७०४ | २७१० | २७१६ | २७२३ | २७२९ | २७३५ | २७४२ | २७४८ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ४ ५ ६ |
| ·४४ | २७५४ | २७६१ | २७६७ | २७७३ | २७८० | २७८६ | २७९३ | २७९९ | २८०५ | २८१२ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ४ ५ ६ |
| ·४५ | २८१८ | २८२५ | २८३१ | २८३८ | २८४४ | २८५१ | २८५८ | २८६४ | २८७१ | २८७७ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ५ ५ ६ |
| ·४६ | २८८४ | २८९१ | २८९७ | २९०४ | २९११ | २९१७ | २९२४ | २९३१ | २९३८ | २९४४ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ५ ५ ६ |
| ·४७ | २९५१ | २९५८ | २९६५ | २९७२ | २९७९ | २९८५ | २९९२ | २९९९ | ३००६ | ३०१३ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ५ ५ ६ |
| ·४८ | ३०२० | ३०२७ | ३०३४ | ३०४१ | ३०४८ | ३०५५ | ३०६२ | ३०६९ | ३०७६ | ३०८३ | १ १ २ | ३ ४ ४ | ५ ६ ६ |
| ·४९ | ३०९० | ३०९७ | ३१०५ | ३११२ | ३११९ | ३१२६ | ३१३३ | ३१४१ | ३१४८ | ३१५५ | १ १ २ | ३ ४ ४ | ५ ६ ६ |

मुद्रक
शिवकुमार वर्मा, एम्. ए.
प्रबन्धक, आर्यभारती मुद्रणालय
नागपुर.

# शुद्धिपत्र

| पृष्ठ संख्या | पंक्ति | अशुद्ध | शुद्ध |
|---|---|---|---|
| २३ | ७ | $\frac{त^{३}}{थ}$ | $\frac{त}{थ}$ |
| २३ | ८ | $य_{ड}$ | $य^{ड}$ |
| २९ | ३ | $२\sqrt{ख}$ | $२\sqrt{ख}$ |
| ३५ | १७ | $क^{२}+ख^{२}$ या | $क^{२}+ख^{२}$ |
| ४४ | १२ | अतः | म्हणून |
| ६४ | १७ | $म^{स}$ | $म_{स}$ |
| ६४ | १८ | $म^{त}$ | $म_{त}'$ |
| ६६ | २ | $\frac{त}{+१}$ | $\frac{त}{त+१}$ |
| ७९ | ८ | संख्येने पेक्षा | संख्येने १ पेक्षा |
| ८२ | ८ | $\frac{१}{१-\frac{२}{७}}$ | $\frac{१}{१-\frac{१}{७}}$ |
| ८३ | १० | $यो^{स}$ | $यो_{स}$ |
| १३४ | २० | $कय^{१}$ | $कय^{२}$ |
| १४१ | १६ | कय + र + छ | कय + जर + छ |
| १७४ | ३ | $\frac{}{य}$ | $\frac{१}{य}$ |
| २८२ | १३ | $\frac{स(स-१)(स-२)}{\underline{|३}}$ | $\frac{स(स-१)(स-२)}{\underline{|३}}य^{३}$ |